

# MODELADO DE CONTROL ESTRUCTURAL LINEAL CON ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

Diego Fernando Mora Méndez.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MANIZALES

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería y Arquitectura  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y  
Computación  
Manizales  
2007

# MODELADO DE CONTROL ESTRUCTURAL LINEAL CON ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

Diego Fernando Mora Méndez

Trabajo de grado para optar al título de  
Magíster en Ingeniería — Automatización Industrial

Director  
Prof. Jorge Eduardo Hurtado Gómez

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería y Arquitectura  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
Manizales  
2007



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA  
SEDE MANIZALES

BIBLIOTECA ALFONSO CARVAJAL ESCOBAR  
Resumen trabajo de Grado

<b>CARRERA Maestría en Automatización Industrial</b>		
<b>1er Apellido Mora</b>	<b>2° Apellido Méndez</b>	<b>Nombre Diego Fernando</b>
<b>1er Apellido</b>	<b>2° Apellido</b>	<b>Nombre</b>
<b>1er Apellido</b>	<b>2° Apellido</b>	<b>Nombre</b>
<b>TITULO DEL TRABAJO Modelado de control estructural lineal con elementos finitos estocásticos</b>		
<b>NOMBRE DEL DIRECTOR DEL TRABAJO Jorge Eduardo Hurtado Gómez</b>		
<b>RESUMEN DEL CONTENIDO (ESPAÑOL) Este documento presenta el análisis de una estructura Flexible sometida a cargas producidas por tráfico vehicular mediante un modelo en tres dimensiones de la interacción puente-vehículo. El empleo del método de elementos finitos y un apropiado modelo en Tres dimensiones del vehículo permite resolver el sistema de ecuaciones acopladas de la interacción puente-vehículo. La carga resultante del anterior análisis es incluida posteriormente en el modelo estocástico de la dinámica del puente para observar el efecto de las incertidumbres en los parámetros de la estructura sobre su respuesta. Se propone un control LQG (Linear system, Quadratic cost, para controlar la respuesta del puente a perturbaciones de tráfico vehicular con el fin de reducir las vibraciones que este tipo de cargas produce en la estructura flexible. Finalmente se analizan los resultados del modelo estocástico con y sin fuerza de control para mostrar la variación entre los dos estados.</b>		
<b>ABSTRACT In this document is presented the analysis of an flexible structure under traffic loads. The structure is represented by a three dimensional finite element model of the vehicle-bridge Interaction. Using of the finite element method and an three dimensional appropriated model is Calculated the system of equations of the interaction vehicle-bridge. The resulting force of the former analysis is included in the stochastic model of the bridge in order to see the effect of parametrical Uncertainties of the structure in its response. It was proposed a LQG control (Linear system, Quadratic cost, Gaussian noise) to control the response of the bridge under traffic perturbations And in this way reduce the vibration that this loads produce in the flexible structure. Finally The results of the stochastic model was analyzed with and without control force in order to show The differences between the responses</b>		
<b>PALABRAS CLAVES, Elementos finitos, control estructural, LQG, tráfico vehicular, sistemas estocásticos,</b>		

# Resumen

Este documento presenta el análisis de una estructura flexible sometida a cargas producidas por tráfico vehicular mediante un modelo en tres dimensiones de la interacción puente-vehículo. El empleo del método de elementos finitos y un apropiado modelo en tres dimensiones del vehículo permite resolver el sistema de ecuaciones acopladas de la interacción puente-vehículo. La carga resultante del anterior análisis es incluida posteriormente en el modelo estocástico de la dinámica del puente para observar el efecto de las incertidumbres en los parámetros de la estructura sobre su respuesta. Se propone un control LQG (Linear Quadratic Gaussian) para controlar la respuesta del puente a perturbaciones de tráfico vehicular con el fin de reducir las vibraciones que este tipo de cargas produce en la estructura flexible. Finalmente se analizan los resultados del modelo estocástico con y sin fuerza de control para mostrar la variación entre los dos estados.

# Agradecimientos

*Agradezco a Dios, a mi familia, a mis profesores y a mis amigos por su invaluable colaboración en la ejecución de este trabajo.*

*Este trabajo de grado fue apoyado económicamente con fondos provenientes de la convocatoria Nacional de Investigación 2006 en la modalidad 7, Apoyo a programas de posgrado: tesis de maestría y especialidad en el área de la salud.*

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN.</b>	<b>1</b>
1.1. Diseño estructural. . . . .	1
1.2. Requerimientos estructurales. . . . .	2
1.3. Naturaleza de las cargas y de los materiales. . . . .	2
1.3.1. Materiales. . . . .	2
1.3.2. Cargas. . . . .	3
1.4. Características del modelo continuo y discreto. . . . .	3
1.5. Disminución de los efectos de las cargas y medidas de conservación. . . . .	5
1.5.1. Esbozo del trabajo. . . . .	5
<b>2. DINÁMICA VEHÍCULO PUENTE</b>	<b>7</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	7
2.2. MODELO DE LA ESTRUCTURA DEL PUENTE. . . . .	8
2.2.1. Geometría del puente. . . . .	8
2.2.2. Propiedades del puente y del vehículo. . . . .	8
2.2.3. Malla de elementos finitos para el puente. . . . .	10
2.2.4. Modelo matemático de las láminas. . . . .	10
2.2.5. Análisis modal del sistema no amortiguado. . . . .	13
2.2.6. Modos de vibración. . . . .	16
2.3. IDEALIZACIÓN DEL VEHÍCULO. . . . .	16
2.4. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA PUENTE VEHÍCULO. . . . .	17
2.4.1. Modelo de la superficie del puente. . . . .	22
2.5. RESPUESTA DEL PUENTE AL PASO DEL VEHÍCULO. . . . .	23
<b>3. ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS</b>	<b>27</b>
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	27
3.1.1. Modelo matemático estocástico. . . . .	28
3.2. APROXIMACIONES A LA SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS ESTOCÁSTICOS	29

3.2.1.	Métodos de perturbación . . . . .	29
3.2.2.	Simulación de Monte carlo . . . . .	31
3.3.	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS ESPECTRALES . .	32
3.3.1.	Modelo Matemático . . . . .	32
3.3.2.	Elementos finitos deterministas . . . . .	32
3.3.3.	Procesos de discretización del campo aleatorio . . . . .	33
3.3.4.	Campos aleatorios y espacios de Hilbert relacionados . . . . .	33
3.3.5.	Expansiones de Karhunen-Loève . . . . .	34
3.3.6.	Solución de la ecuación integral . . . . .	35
3.3.7.	Caso dos dimensional . . . . .	38
3.3.8.	Ecuación de equilibrio estocástica . . . . .	38
3.3.9.	Representación de la respuesta utilizando el método de expansiones de Neumann . . . . .	39
3.3.10.	Proyección de la respuesta sobre el caos homogéneo . . . . .	40
3.3.11.	Representación general de la respuesta en $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ . . . . .	41
3.3.12.	Análisis del SSFEM . . . . .	43
3.3.13.	Aplicación de las condiciones de borde . . . . .	45
3.3.14.	Post-proceso: Análisis de esfuerzos y deformaciones . . . . .	45
<b>4.</b>	<b>CONTROL ESTRUCTURAL</b>	<b>47</b>
4.1.	INTRODUCCIÓN. . . . .	47
4.2.	DESCRIPCIÓN EN LA FORMA DE ESPACIO DE ESTADOS. . . . .	48
4.2.1.	Modelo nodal. . . . .	48
4.2.2.	Modelo en coordenadas modales. . . . .	49
4.2.3.	Función de transferencia en coordenadas modales. . . . .	51
4.2.4.	Polos de la estructura. . . . .	51
4.3.	MODELO ESTRUCTURAL EN ESPACIO DE ESTADOS. . . . .	51
4.3.1.	Modelos nodales. . . . .	51
4.3.2.	Modelos en coordenadas modales. . . . .	52
4.4.	CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD. . . . .	54
4.4.1.	Controladores de baja autoridad. . . . .	56
4.5.	CONTROLADORES LQG. . . . .	56
4.5.1.	Definición de las ganancias. . . . .	57
4.5.2.	Controlador LQG de baja autoridad. . . . .	61
4.5.3.	Propiedad 1. Relación entre A, B, C para el controlador LQG de baja autoridad. . . . .	61
4.5.4.	Propiedad 2. Solución aproximada del CARE. . . . .	61
4.5.5.	Propiedad 3. Solución aproximada del FARE. . . . .	62
4.5.6.	Diagrama de polos y ceros. . . . .	62
4.5.7.	Propiedad 4. Polos y ceros del LQG. . . . .	62
4.5.8.	Propiedad 5. Polos y ceros para el estimador. . . . .	64
4.6.	APLICACIÓN DE LA LEY DE CONTROL. . . . .	64

<b>5. APLICACIÓN DEL SSFEM CON Y SIN FUERZA DE CONTROL.</b>	<b>67</b>
5.1. INTRODUCCIÓN. . . . .	67
5.2. DINÁMICA DEL SISTEMA UTILIZANDO SSFEM. . . . .	67
5.3. CONDENSACIÓN ESTÁTICA. . . . .	69
5.4. SOLUCIÓN DEL SSFEM SIN APLICACIÓN DEL CONTROL. . . . .	69
5.5. SOLUCIÓN DEL SSFEM CON APLICACIÓN DEL CONTROL. . . . .	70
5.6. COMPARACIÓN DEL LA SOLUCIÓN SSFEM CON Y SIN APLICACIÓN DEL CONTROL. . . . .	70
5.6.1. Análisis del coeficiente de variación. . . . .	73
5.6.2. Análisis de la potencia de la señal. . . . .	73
5.7. COMPARACIÓN DEL LA SOLUCIÓN SSFEM Y FEM CON Y SIN APLICACIÓN DEL CONTROL. . . . .	74
5.7.1. Desplazamiento vertical. . . . .	74
5.7.2. Desplazamiento transversal. . . . .	85
5.7.3. Desplazamiento longitudinal. . . . .	85
5.7.4. Aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con SSFEM. .	86
5.8. Análisis de la fatiga en el concreto. . . . .	87
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>96</b>



# Lista de Figuras

1.1. Muestra de la distribución del tráfico en un día cualquiera (TRLLimited [36]). . .	4
1.2. Ejemplo de control activo aplicado a un puente. . . . .	5
2.1. Secciones del puente de concreto reforzado. Disposición general . . . . .	9
2.2. Elemento de lamina plana . . . . .	10
2.3. Elemento de lamina plana . . . . .	11
2.4. Modos de vibración. a) primer modo a flexión. b) primer modo a torsión. c) segundo modo a torsión. d) segundo modo a flexión. . . . .	16
2.5. Modelo del vehículo. . . . .	17
2.6. Densidad espectral de potencia para la vía del puente. . . . .	23
2.7. Realización del perfil de la vía. . . . .	23
2.8. Distribución del desplazamiento en z. . . . .	24
2.9. Distribución del desplazamiento en x. . . . .	24
2.10. Deformación en z en el nodo 229. . . . .	25
2.11. Deformación en z en el nodo 238 . . . . .	25
2.12. Deformación en z en el nodo 247. . . . .	26
2.13. Cargas dinámicas de las llantas para un vehículo que circula a $82,73km/h$ . . . . .	26
3.1. FEM físico. El sistema físico es la fuente del proceso. . . . .	28
4.1. Ubicación espacial de los sensores y actuadores. Sensores en los nodos 231 y 249. Actuadores en los nodos 437 y 38. . . . .	48
4.2. Estructura interna del sistema LQG. . . . .	57
4.3. Estructura interna del sistema LQG. . . . .	58
4.4. Diagrama de los polos del sistema estructural en lazo abierto (*) y en lazo cerrado (o) . . . . .	63
4.5. Detalle del diagrama de los polos del sistema estructural en lazo abierto (*) y en lazo cerrado (o) . . . . .	63
4.6. Diagrama de los polos del estimador. . . . .	64
4.7. Norma infinita de la matriz de transferencia en lazo abierto (—) y en lazo cerrado (—). . . . .	65
4.8. Fuerzas de control en los nodos 437 y 38. . . . .	65
4.9. Desplazamientos medidos en los nodos 231 y 249 sin la aplicación de la ley de control. . . . .	66

4.10. Desplazamientos medidos en los nodos 231 y 249 aplicando la ley de control. . .	66
5.1. Ubicación de los nodos y grados de libertad seleccionados. . . . .	68
5.2. Desplazamiento en $z$ y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 sin control. . . . .	70
5.3. Desplazamiento en $y$ y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 sin control. . . . .	71
5.4. Desplazamiento en $z$ y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 con control. . . . .	71
5.5. Desplazamiento en $y$ y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 con control. . . . .	72
5.6. Desplazamiento en $x$ y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 148. .	72
5.7. Desplazamiento en $x$ para el nodo 148. . . . .	73
5.8. Efecto del control en el desplazamiento en $z$ haciendo uso del SSFEM y distribución de probabilidad en el tiempo para el nodo 148. Inferior: Efecto del control en el desplazamiento en $z$ haciendo uso del FEM . . . . .	74
5.9. Efecto del control sobre el desplazamiento en $z$ para el nodo 148. . . . .	75
5.10. Efecto del control en el desplazamiento en $z$ para el nodo 249. . . . .	75
5.11. Superior: Efecto del control en el desplazamiento en $z$ haciendo uso del SSFEM y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249. Inferior: Efecto del control en el desplazamiento en $z$ haciendo uso del FEM. . . . .	76
5.12. Efecto del control en el desplazamiento en $y$ haciendo uso del SSFEM y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249. . . . .	77
5.13. Efecto del control en el desplazamiento en $y$ para el nodo 249. . . . .	77
5.14. Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección $y$ en el nodo 249. .	78
5.15. Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección $z$ en el nodo 249. .	78
5.16. Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección $z$ en el nodo 249. .	79
5.17. Potencia del desplazamiento en $y$ para el nodo 249. . . . .	79
5.18. Potencia del desplazamiento en $z$ para el nodo 249. . . . .	80
5.19. Superior, Efecto del control en el desplazamiento en $z$ para el nodo 249 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en $z$ para el nodo 249 con SSFEM. .	81
5.20. Superior, Desplazamiento en $z$ para el nodo 249 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en $z$ para el nodo 249 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. . . . .	82
5.21. Superior, Efecto del control en el desplazamiento en $z$ para el nodo 148 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en $z$ para el nodo 148 con SSFEM. .	83
5.22. Superior, Desplazamiento en $z$ para el nodo 148 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en $z$ para el nodo 148 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. . . . .	84
5.23. Superior, Efecto del control en el desplazamiento en $y$ para el nodo 249 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en $y$ para el nodo 249 con SSFEM. .	85

5.24. Superior, Efecto del control en el desplazamiento en $x$ para el nodo 148 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en $x$ para el nodo 148 con SSFEM.	86
5.25. Superior, Desplazamiento en $x$ para el nodo 148 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en $x$ para el nodo 148 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. . . . .	87
5.26. Efecto en el desplazamiento en $z$ para el nodo 249 con el aumento de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. . . . .	88
5.27. Curva $S - N$ para el concreto reforzado. . . . .	89
5.28. Crecimiento de la falla en el puente de concreto reforzado para los casos SSFEM, FEM con y sin control. . . . .	90
5.29. Detalle de la gráfica del crecimiento de la falla en el puente de concreto reforzado para los casos SSFEM, FEM con y sin control. . . . .	90

# Lista de Tablas

2.1. Propiedades del puente. . . . .	9
2.2. Propiedades del vehículo. . . . .	9
5.1. Parámetros del campo aleatorio. . . . .	67
5.2. Vida esperada del puente. . . . .	91

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN.

### 1.1. Diseño estructural.

El centro de atención de las investigaciones recientes en mecánica de estructuras ha sido mejorar los modelos (modelos de láminas, vigas, sólidos tridimensionales, etc) y las leyes constitutivas (la teoría elástica, plástica y la teoría de daño, etc), pero a pesar del mejoramiento tanto en los modelos constitutivos y las técnicas computacionales no se ha resuelto el problema de la identificación de los parámetros del modelo y las incertidumbres asociadas con su estimación. Es muy común en los problemas asociados con la ingeniería civil encontrar aplicaciones donde existe aleatoriedad de los materiales, por ejemplo los suelos, el concreto, etc, en las cargas como en el caso del viento, los sismos, entre otros y en los cuales se han aplicado modelos deterministas que hacen uso de características promedio, resultando en una aproximación lejana de la realidad (Chen Y, Feng M. Q. [16]).

El diseño estructural de un puente representa un problema complejo para los diseñadores estructurales. El problema radica en la determinación de las dimensiones generales de la estructura y la subestructura de tal manera que se encuentre la solución más conveniente con el máximo de seguridad y con el mínimo de costo.

El diseño detallado debería considerar el estado límite de serviciabilidad (Deflexión y comfort), el estado límite último (la estabilidad y la resistencia) y el estado límite de eventos extremos (colapso de la estructura). Para asegurar un diseño adecuado se deben realizar análisis rigurosos que incluyen análisis por medio de elementos finitos del sistema global en tres dimensiones, análisis por elementos finitos a nivel local y análisis tanto en el campo de las no linealidades geométricas como no linealidades de los materiales.

El cálculo dinámico, el cual generalmente se realiza haciendo uso del análisis espectral permite determinar la respuesta estructural frente a diferentes tipos de carga como viento y sismo. En el caso de las cargas de tráfico el análisis se realiza convencionalmente con los factores de amplificación dinámica.

## 1.2. Requerimientos estructurales.

Las estructuras deben resistir los efectos de las cargas de peso propio y una variedad de cargas externas y fenómenos ambientales. Para conseguir un nivel adecuado de seguridad estructural, la naturaleza estadística del fenómeno generador al igual que la capacidad de carga deben ser consideradas. Una aproximación racional es adoptar métodos probabilistas. Los códigos son calibrados para alcanzar un nivel adecuado de seguridad estructural para situaciones de carga ordinaria, pero los métodos probabilistas pueden subsecuentemente ser usados para calibrar los factores de seguridad en situaciones de carga o de diseño que no están cubiertos por los códigos.

La norma AASHTO y el colombiano de puentes son especificaciones que emplean el diseño basado en factores de resistencia y carga (LRFD), tales factores han sido desarrollados a partir de la teoría de confiabilidad, la cual se apoya en el conocimiento estadístico de las cargas y el desempeño estructural. Las especificaciones de las normas no intentan suplantar el juicio del diseñador, solamente establecen los requerimientos mínimos necesarios para ofrecer seguridad a los usuarios (AASHTO [6]).

## 1.3. Naturaleza de las cargas y de los materiales.

### 1.3.1. Materiales.

Muchos libros tratan sobre las propiedades del concreto, o a lo que hoy día se conoce como la tecnología avanzada del concreto. Existen muchas relaciones entre los distintos fenómenos que se presentan en el concreto, así que el diseñador debe enfrentarse a problemas muy específicos; en el caso de diseño de puentes, no solo es importante la resistencia del concreto, sino también su durabilidad, las deformaciones ocurridas durante la construcción y los cambios durante su vida útil.

El concreto es una matriz que consiste de un mortero hecho generalmente con cemento, agregado fino y agua. La composición química del cemento, la naturaleza de los agregados, la relación finos-cemento y la relación agua-cemento, son parámetros que determinan las propiedades del mortero. La respuesta mecánica y dinámica de las estructuras de concreto depende de las propiedades del mortero endurecido dentro de condiciones ambientales determinadas. Así la estructura de concreto no es tan simple, sino que al contrario tiene una naturaleza muy compleja.

Cuando el concreto tiene concentraciones de cloro y éstas son considerables se puede iniciar el proceso de corrosión del refuerzo estructural. Otro fenómeno que puede cambiar el comportamiento mecánico es la carbonatación del concreto lo cual produce que el refuerzo pierda su recubrimiento y quede sometido a las condiciones ambientales. Los anteriores son tan solo un par de ejemplos que se presentan en las estructuras de concreto reforzado y que pueden modificar el comportamiento a corto y largo plazo. Podemos listar las principales características que tienen efecto sobre su comportamiento mecánico del concreto como sigue,

- Efectos dependientes del tiempo.

- Porosidad.
- Permeabilidad.
- Tipo de cemento.
- Relación agua-cemento.
- Tipo de agregados (grava, arena, etc).
- Método de compactación.
- Curado del concreto.
- Efectos ambientales.
- Formación de grietas por efectos de la temperatura.
- Contenido de cemento.

### 1.3.2. Cargas.

La naturaleza de las cargas de los vehículos es muy variada y depende esencialmente del sistema de suspensión, el número de ejes, la presión de contacto (Divine [18]). La magnitud de las cargas generalmente se incrementa con la rugosidad de la vía y la velocidad del vehículo. En general, en los modelos matemáticos la excitación del tráfico sobre la estructura del puente es modelada como un ruido blanco no correlacionado (Getachew A. [2] y Chen Y, Feng M. Q. [16]).

Cuando un vehículo atraviesa un puente, tanto el puente como el vehículo vibran. Ha sido demostrado que en el caso de puentes de luces cortas y medias en los cuales los vehículos circulan a velocidades normales, las fuerzas dinámicas de las llantas son debidas principalmente a las irregularidades presentes en la superficie de rodadura (Belotserkovskiy P.M. [45], OConnor Alan y OBrien E. J. [42]) .

El deterioro de la estructura de un puente es causado en gran medida por el tráfico que circula sobre él, principalmente debido a la magnitud de las cargas aplicadas por las llantas de los vehículos y el número de veces que éstas son aplicadas. Diversos estudios se han realizado para determinar la composición del flujo vehicular y se ha determinado que estos dependen generalmente de las velocidades de los vehículos, la hora del día, el tipo de vía, entre otros aspectos (TRL Limited [36], Divine [18]). Algunos ejemplos de tráficos vehiculares se muestran en las figura 1.1.

## 1.4. Características del modelo continuo y discreto.

El objetivo del análisis es investigar la respuesta más probable de la estructura de un puente debido a un rango de cargas aplicadas. El resultado debería convertirse en datos útiles para el

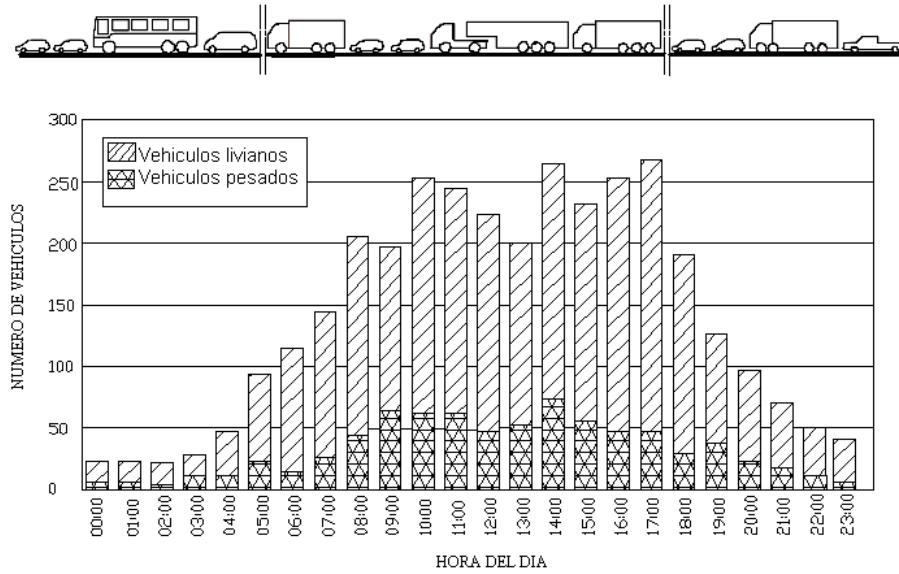


Figura 1.1: Muestra de la distribución del tráfico en un día cualquiera (TRLLimited [36]).

diseño, dándole al diseñador la información necesaria para evaluar el desempeño de la estructura y determinar acciones apropiadas para alcanzar el diseño más eficiente.

El análisis estructural basado en elementos finitos se utiliza para evaluar la estructura en forma integral pero antes de aplicar el método debe tenerse en cuenta el conjunto de suposiciones utilizadas para la formulación de un determinado tipo de elemento, debido a que el comportamiento de cada elemento limita el comportamiento físico del sistema. Otros aspectos importantes son las técnicas de solución numéricas y las limitaciones de precisión numérica de los computadores.

El análisis dinámico ha incrementado su uso debido a que se requiere determinar frecuentemente el efecto de las cargas sísmicas, de viento, vehiculares, etc. La metodología más frecuente es el análisis espectral.

Muchos otros factores contribuyen a la determinación de los parámetros del modelo. Estos factores deben reflejar aspectos tales como la complejidad de la estructura bajo investigación, tipos de cargas a ser examinados y un aspecto de gran importancia es la manera en que se presentan los resultados de tal forma que sea sencilla su interpretación.

El primer paso para alcanzar un modelo confiable es definir un conjunto apropiado de materiales basados en datos publicados e investigaciones. El paso siguiente es la creación y la evolución numérica de los subsistemas que componen el puente. El modelo global final debe incluir una representación apropiada de la secuencia de la construcción, el comportamiento de los componentes estructurales, las condiciones de borde de las bases o fundaciones y los detalles de las



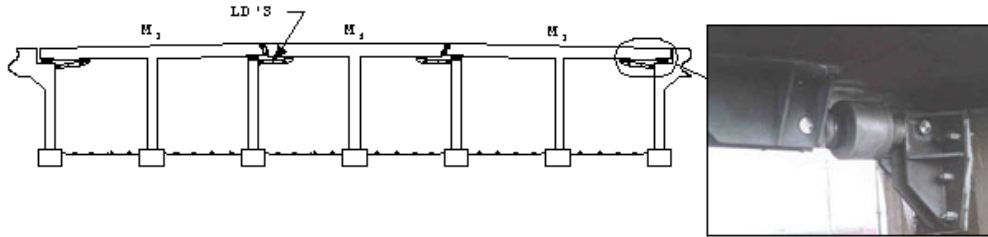


Figura 1.2: Ejemplo de control activo aplicado a un puente.

conexiones.

## 1.5. Disminución de los efectos de las cargas y medidas de conservación.

En años recientes muchos progresos y nuevos conceptos se han alcanzado en el desarrollo del control estructural para reducir la respuesta frente a vibraciones producidas por cargas de distintas naturalezas. Algunos dispositivos pueden ser instalados en las estructuras para dar a estas mejor serviciabilidad y seguridad. El control de las estructuras bajo excitaciones externas puede hacerse de varias maneras, entre estas están los sistemas de control pasivo y activo (Diceli M. [38]). El control pasivo reduce la energía de las perturbaciones que actúan sobre la estructura transfiriéndola a otros elementos estructurales (Rodellar J. [30]). Mientras el control activo usa fuerzas de control producidas por actuadores para balancear la carga externa. La mayor desventaja del control activo es que en muchos casos las fuerzas de control son demasiado grandes para los actuadores existentes en el mercado.

Dado que el objetivo del control es controlar la respuesta estructural y que las perturbaciones externas son la principal fuente que la produce, se requiere que tanto la respuesta como la perturbación sean medidas durante el movimiento estructural. Estas medidas son empleadas para el diseño de la fuerza de control para conseguir la retroalimentación o el sistema en lazo cerrado. Por lo tanto, el efecto de la retroalimentación es modificar los parámetros estructurales de manera que esto ayude a la estructura a reaccionar frente a la perturbación externa.

### 1.5.1. Esbozo del trabajo.

Este documento se compone de cuatro capítulos. El primer capítulo trata de la solución planteada por Kim y Kawatani [32] para resolver la dinámica del puente-vehículo empleando un modelo en tres dimensiones, el cual permite la utilización del método de elementos finitos con el fin de determinar las cargas que se aplican en el puente cuando un vehículo circula sobre él. En el segundo capítulo se describe la teoría de elementos finitos estocásticos desarrollada por

Ghanem y Spanos y se explica cómo esta teoría es incluida en el problema bajo estudio. El tercer capítulo se ocupa del diseño del controlador LQG (Linear Quadratic Gaussian) de bajo orden para el caso de estructuras flexibles y se determina la fuerza de control que debe ser aplicada a la estructura del puente para controlar los desplazamientos que se producen por el paso del vehículo. Finalmente se presentan los resultados de la aplicación de la ley de control al modelo de elementos finitos estocásticos y se comparan los resultados obtenidos sin la aplicación de esta.

## Capítulo 2

# DINÁMICA VEHÍCULO PUENTE

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Una de las fuerzas dinámicas externas más importantes que actúan sobre los puentes, son las cargas móviles producidas por el tráfico vehicular, las cuales varían con el tiempo. Además, las vibraciones producidas por tráfico son generalmente fuentes de incomodidad para quienes transitan sobre el puente. En el diseño de puentes es importante comprender el efecto que tiene el flujo vehicular sobre la estructura.

Para realizar el análisis de puentes y tener en cuenta las vibraciones producidas por el tráfico se han planteado varias estrategias; las más utilizadas son los factores de amplificación dinámica acoplada con los efectos del sistema puente vehículo. En el artículo de Zhang [62] se realiza el análisis de la dinámica puente-vehículo utilizando factores de amplificación dinámica y cargas de distribución uniforme equivalente (EUDL) bajo flujos de tráfico aleatorio y superficies de rugosidad estocásticas.

Las vibraciones en los puentes son causadas por los camiones que circulan sobre ellos a altas velocidades sobre superficies de rodadura irregulares. La interacción entre las llantas y la superficie de rodadura causa la excitación dinámica la cual se propaga por toda la estructura (Lombaerta G, Degrandea G y Clouteaub D. [37]).

Generalmente, la carga dinámica obtenida del análisis del sistema puente-vehículo es incorporada dentro del diseño estructural en forma de factores de amplificación dinámica.

Además de los factores de amplificación, se han propuesto varias metodologías para evaluar la dinámica de interacción puente-vehículo, la primera de ellas es un método iterativo que resuelve dos conjuntos desacoplados de ecuaciones para el vehículo y el puente separadamente hasta satisfacer las condiciones de compatibilidad geométricas y las condiciones de equilibrio entre las fuerzas entre el puente y el vehículo. El segundo método construye un sistema de ecuaciones acopladas utilizando el método de superposición modal y resuelve el sistema utilizando integración directa en el tiempo. Se reporta un tercer método el cual hace uso de elementos de interacción

punto-vehículo, que consiste de un elemento del punto y la correspondiente unidad de vehículo que descansa sobre él (Zhu X y Law S. [63]).

Los métodos de análisis de la dinámica punto-vehículo se pueden clasificar en dos categorías. Los métodos experimentales, los cuales requieren considerable tiempo y dinero, y los métodos analíticos que representan una alternativa más económica pero que requieren una validación.

Dentro de las estrategias de solución, hasta ahora se han implementado en general métodos que emplean modelos en una o dos dimensiones. Los sistemas dos dimensionales proporcionan gran cantidad de información sobre la respuesta dinámica de la estructura completa del punto (Yang Y. y Wu Y. [59]). Los modelos en tres dimensiones han limitado su implementación a la simulación de la respuesta sobre componentes locales del punto tales como los tableros o las vigas. La mayor parte de los estudios que se han realizado con modelos tres dimensionales se han centrado en la respuesta del punto bajo carga muerta (Kim Ch, Kawatani M y Bong K. [32]).

En lo siguiente se presenta el modelo de elementos finitos de la estructura del punto que será objeto del análisis, se explican las suposiciones necesarias para la construcción de dicho modelo, luego se presenta la dinámica de la interacción del punto-vehículo y finalmente se muestran los resultados de este análisis.

## 2.2. MODELO DE LA ESTRUCTURA DEL PUENTE.

### 2.2.1. Geometría del punto.

El objetivo del modelo analítico es describir la geometría, las masas, las conexiones, las condiciones de borde y las cargas del prototipo tan cercanamente al modelo real, de tal manera que sea fácil hacer la interpretación de las cantidades de respuesta.

La figura 2.1 muestra las secciones transversal y superior del punto objeto de este estudio. Para hallar la respuesta dinámica del punto se emplea el método de elementos finitos y el análisis modal.

### 2.2.2. Propiedades del punto y del vehículo.

En el cuadro 2.1 y 2.2 se presentan las propiedades mecánicas y dinámicas del punto y las propiedades del vehículo respectivamente.

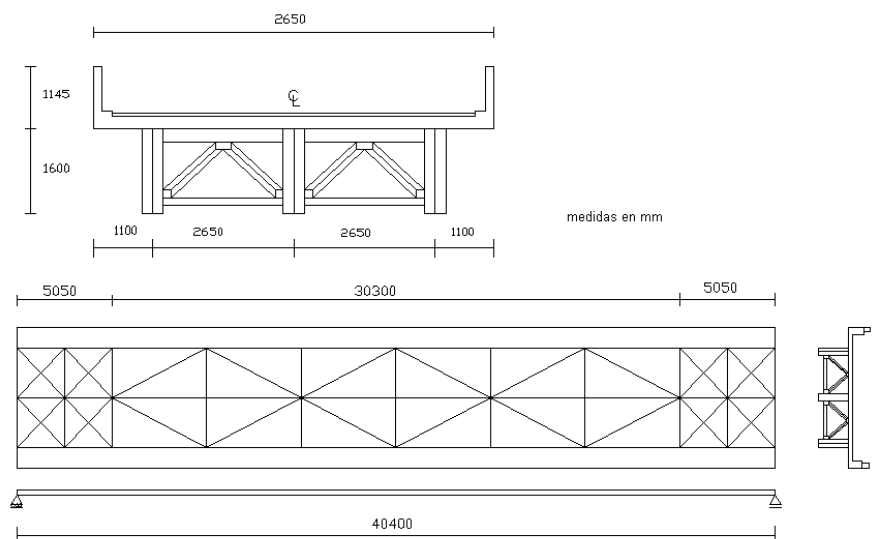


Figura 2.1: Secciones del puente de concreto reforzado. Disposición general

Masa por unidad de longitud ( $kg/m$ )		7550
Area transversal de las secciones de las vigas $m^2$		0,1420
Momento de inercia ( $m^4$ )		0,2120
Constante torsional ( $m^4$ )		0,0548
Constante de amortiguamiento		0,0253
Frecuencia fundamental ( $Hz$ )	1er modo a flexión	2,123
Frecuencia fundamental ( $Hz$ )	2do modo a torsión	2,368

Tabla 2.1: Propiedades del puente.

Masa ( $kg$ )	$m_{v22}$	500
	$m_{v11}$	18500
	$m_{v12}$	1450
Constante de rigidez del sistema	frontal	1577
de suspensión ( $kN/m$ )	posterior	4724
Coefficiente de amortiguamiento ( $kNs/m$ )	eje frontal	11,200
	eje posterior	33,420

Tabla 2.2: Propiedades del vehículo.

### 2.2.3. Malla de elementos finitos para el puente.

La malla de elementos finitos del puente se generó haciendo uso del programa *GID 7.2* y corresponde a la figura 2.2

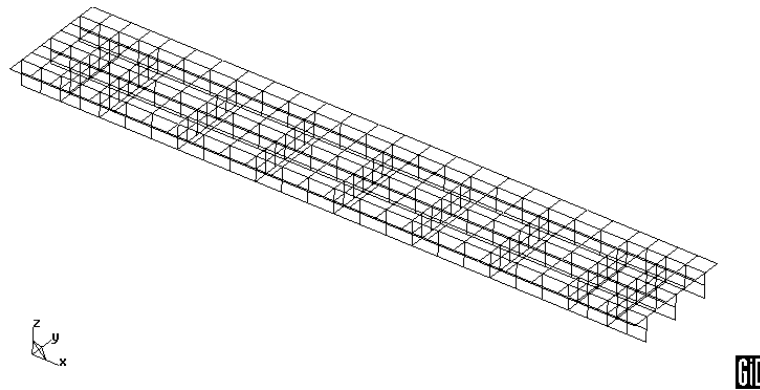


Figura 2.2: Elemento de lamina plana

### 2.2.4. Modelo matemático de las láminas.

#### Determinación de la matriz de rigidez del puente.

El tipo de elemento utilizado para modelar el puente es un elemento de lámina o *Shell* como el de la referencia (Kwon Y. [57]). Un elemento de lámina surge básicamente de los elementos a flexion o elementos de placa. Una lámina es un objeto tridimensional representado por la superficie media y dotado de ciertas características mecánicas como en la figura 2.3. La transferencia de tales propiedades a la superficie media es hecha mediante suposiciones cinemáticas y estáticas.

Como resultado de estas suposiciones puede ser obteniendo el conjunto de propiedades mecánicas expresado en forma de ley de Hooke generalizada la cual relaciona pequeñas deformaciones con los esfuerzos aplicados en el elemento. Estas se denominan ecuaciones constitutivas. Los siguientes pasos para desarrollar los elementos de lámina son muy similares a la teoría de los

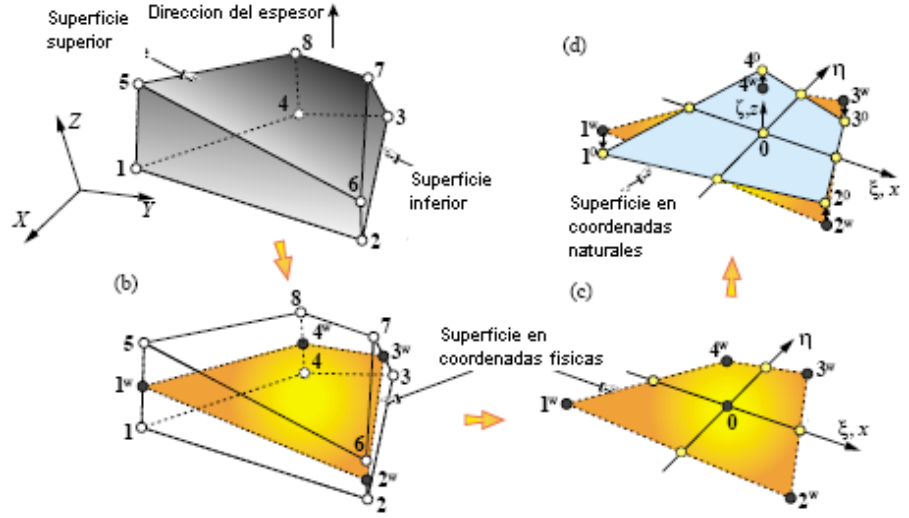


Figura 2.3: Elemento de lamina plana

elementos de viga y/o placa. Deben ser determinadas ecuaciones de equilibrio que relacionen los esfuerzos resultantes en la estructura y las fuerzas externas, y relaciones cinemáticas o ecuaciones de compatibilidad que relacionen deformaciones y desplazamientos (MacNeal Richard H, Wilson Charles T, Harder Robert L y Ho Claus C. [41]).

Las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 son las expresiones cinemáticas para el nodo  $i$  que relacionan las curvaturas producidas por flexión, deformaciones de cortante y deformaciones axiales con los desplazamientos y las rotaciones de la lámina, respectivamente (Hughe T y Tezduya T [29]). El vector de desplazamientos considerado en el elemento es el correspondiente a la ecuación 2.4.

$$\mathbf{B}_b^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_s^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}_m^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{d}^i = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde  $N_i$  y  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  son las funciones de forma y sus correspondientes derivadas. Finalmente la rigidez de cada elemento en coordenadas locales se puede determinar de acuerdo a la expresión 2.5

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega_e + \kappa h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m d\Omega_e \quad (2.5)$$

donde  $h$  es el espesor del elemento,  $\Omega_e$  es el dominio dos dimensional en el plano  $xy$  y  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_s$  y  $\mathbf{D}_m$  son las matrices constitutivas de flexión, cortante y membrana respectivamente.

En el caso de elementos de lámina, la matriz de rigidez se puede ver en la forma de la ecuación 2.6 donde  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{F}$  son las matrices de rigidez, el vector de desplazamientos/rotaciones y el vector de fuerzas nodales, respectivamente. Cuando el elemento de lámina se orienta en el espacio de tres dimensiones aparece un grado de libertad adicional que se denomina en la literatura "*drilling rotation*". Por tanto, cuando se hace el ensamblaje de las matrices y vectores en la matriz de rigidez global, este grado de libertad debe ser considerado (Razaqpur A.G, Nofalb M y Vasilescu A.[47]).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_b \\ \mathbf{d}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_m \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Luego de hacer la transformación correspondiente al sistema de ejes globales se puede hacer el ensamblaje de las matrices elementales en el sistema global.

### Determinación de la matriz de masa.

La matriz de masa del puente se obtiene de las contribuciones elementales (Felippa C. [14]). En este trabajo se determinará la matriz de masa a partir de la formulación variacional. Esto se hace tomando la energía cinética como parte de la funcional que gobierna. La energía cinética de un elemento de densidad  $\rho$  que ocupa un dominio  $\Omega^e$  y se mueve con velocidad  $\vec{v}^e$  es

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho (\vec{v}^e)^T \vec{v}^e d\Omega^e \quad (2.7)$$



siguiendo la filosofía de los elementos finitos, el campo de la velocidad elemental puede ser interpolado mediante las funciones de forma  $\vec{v}^e = N_v^e \dot{u}^e$  donde  $\dot{u}^e$  son las velocidades en los grados de libertad nodales y  $N_v^e$  la matriz de funciones de forma. Insertando esta en la ecuación 2.7 y sacando las velocidades nodales fuera de la integral, se obtiene 2.8 :

$$T^e = \frac{1}{2} (\dot{u}^e)^T \int_{\Omega^e} \rho (N_v^e)^T N_v^e d\Omega^e \dot{u}^e \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (\dot{u}^e)^T M^e \dot{u}^e \quad (2.8)$$

de aquí que la matriz de masa elemental se obtiene como la Hessiana de,

$$M^e = \frac{\partial^2 T^e}{\partial \dot{u}^e \partial \dot{u}^e} = \int_{\Omega^e} \rho (N_v^e)^T N_v^e d\Omega^e \quad (2.9)$$

si se emplean las mismas funciones de forma que se utilizan en la obtención de la matriz de rigidez, es decir,  $N_v^e = N^e$ , entonces la matriz de la ecuación 2.9 se denomina matriz de masa consistente.

### 2.2.5. Análisis modal del sistema no amortiguado.

Para sistemas de multiples grados de libertad, pueden ser definidos los *modos* los cuales representan cada una de las componentes de la respuesta dinámica general. Los modos son esenciales para describir la naturaleza del movimiento y proveer una interpretación física del comportamiento dinámico del sistema (Galvín P, Domínguez J. [20], Kerschen G. Poncelet F. [19]).

Los modos son caracterizados por los valores propios y los vectores propios del sistema. Los valores propios se relacionan a las frecuencias naturales y los vectores propios a las formas modales de un sistema dado. La respuesta en el tiempo del sistema se obtiene de manera directa una vez el análisis modal se realiza (Kwon Y. [57]).

Para un sistema de segundo orden lineal de  $n$  grados de libertad, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento se puede escribir como la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.10)$$

Pero lo que se busca es el movimiento natural del sistema, es decir, la respuesta sin ningún tipo de función de fuerza. La forma de la respuesta se asume como:

$$\mathbf{u}(t) = \phi e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

donde  $\phi$  es la forma modal (vector propio) y  $\omega$  es la frecuencia natural del movimiento. El movimiento se asume puramente sinusoidal debido al amortiguamiento cero en el sistema. Así la solución general es una combinación lineal de cada uno de los modos, como sigue:

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \{\phi_1\} e^{i\omega_1 t} + c_2 \{\phi_2\} e^{i\omega_2 t} + \dots + c_n \{\phi_n\} e^{i\omega_n t} \quad (2.12)$$

donde cada una de las constantes ( $c_i$ ) es evaluada de las condiciones iniciales. Sustituyendo la ecuación 2.11 en la ecuación 2.10 con  $\mathbf{F} = 0$  se obtiene:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi e^{i\omega t} = 0 \quad (2.13)$$

La ecuación anterior tiene solución no trivial si  $(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})$  es singular, es decir, existen  $n$  valores de  $\omega$  que satisfacen la siguiente ecuación:

$$|-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (2.14)$$

La ecuación determinante anterior se satisface para cada conjunto de  $n$  valores de frecuencia  $\omega$  (Bai Y. Keller T. [53]). Estas frecuencias son denotadas como  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , donde  $n$  no excede el número de grados de libertad, es decir  $n \leq n_d$  (Koh B.H. Dyke S.J. [50]). La frecuencia  $\omega_i$  se denomina la  $i$ -ésima frecuencia natural.

Sustituyendo  $\omega_i$  en la ecuación 2.13 se obtiene el conjunto correspondiente de vectores  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  que satisfacen la ecuación. El  $i$ -ésimo vector  $\phi_i$ , correspondiente a la  $i$ -ésima frecuencia natural denomina el  $i$ -ésimo modo de vibración. Los modos de vibración no son únicos, dado que ellos pueden estar escalados en forma arbitraria (Wu J. [31]).

Dado que la matriz de masa es positiva definida y la matriz de rigidez es al menos positiva semidefinida, todos los  $\omega_i$  son no negativos.

**Reducción de Guyan.**

La reducción de Guyan es un método que disminuye el número de grados de libertad en un problema dinámico. A diferencia de la condensación estática, la reducción de Guyan introduce errores debido a la aproximación hecha. La magnitud de estos errores depende de la escogencia de los grados de libertad reducidos o grados de libertad *slave* (Hatch M. [39]).

Para entender la reducción de Guyan es conveniente reescribir el problema de valor propio generalizado de la siguiente manera (Hughes T. [54]):

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Los grados de libertad en  $\phi_1$  son aquellos que van a ser retenidos en el problema de valor propio reducido, mientras aquellos en  $\phi_2$  son los que van a ser eliminados. Los arreglos reducidos se puede obtener de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} = \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{22}^{-1} (\mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{R}$  se define como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

La reducción de Guyan involucra la siguiente relación:

$$\phi_2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \phi_1 \quad (2.19)$$

para eliminar las variables indeseadas. Los arreglos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son referidos como los grados de libertad "master" y "slave" respectivamente.

Los grados de libertad que son retenidos se identifican al calcular la relación entre los elementos de las diagonales de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$ . Los grados de libertad con las relaciones mas pequeñas son los retenidos.

### 2.2.6. Modos de vibración.

En la gráfica 2.4 se presenta los primero modos de vibración para el puente bajo análisis.

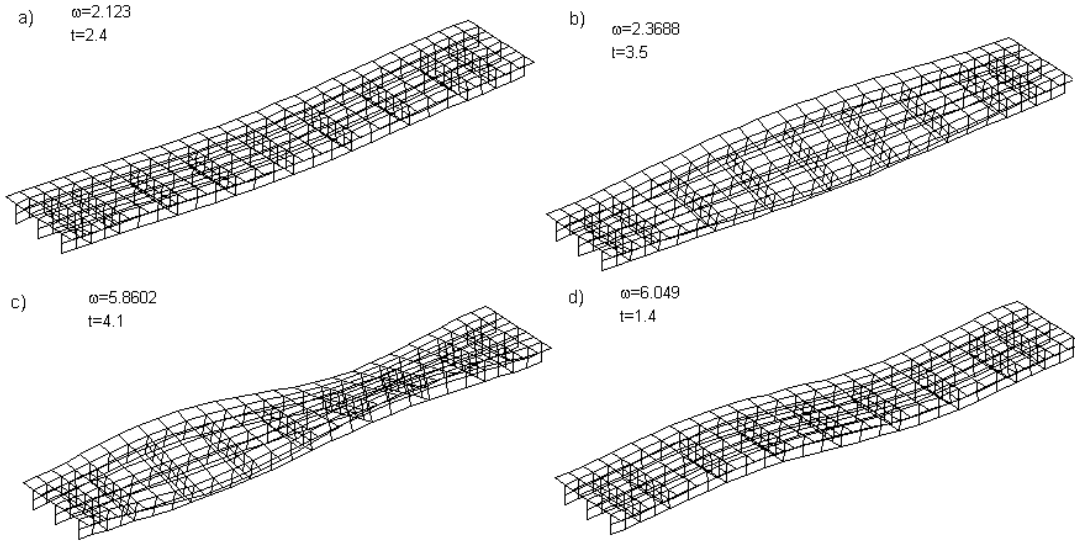


Figura 2.4: Modos de vibración. a) primer modo a flexión. b) primer modo a torsión. c) segundo modo a torsión. d) segundo modo a flexión.

## 2.3. IDEALIZACIÓN DEL VEHÍCULO.

El camión de tres ejes (uno adelante y dos atrás) se idealiza como un modelo vehicular de ocho grados de libertad como en la figura 2.5. El cuerpo del vehículo es considerado como un cuerpo rígido soportado por un conjunto de resortes y amortiguadores atados a cada eje.

Los grados de libertad del vehículo son:  $Z_{11}$  que se refiere al rebote del cuerpo del vehículo,  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$  son los saltos generados en los ejes delantero y trasero,  $\theta_{x11}$  es el giro del cuerpo del vehículo en la dirección longitudinal,  $\theta_{x12}$  y  $\theta_{x22}$  son los giros respecto a la dirección longitudinal de los ejes delantero y trasero,  $\theta_{y11}$  y  $\theta_{y22}$  son respectivamente los giros transversales del cuerpo del vehículo y el eje trasero. Existen tres masas concentradas  $m_{v11}$ ,  $m_{v12}$  y  $m_{v22}$  correspondientes a la masa del vehículo, la masa del eje delantero y la masa del eje trasero. Las rigideces de los

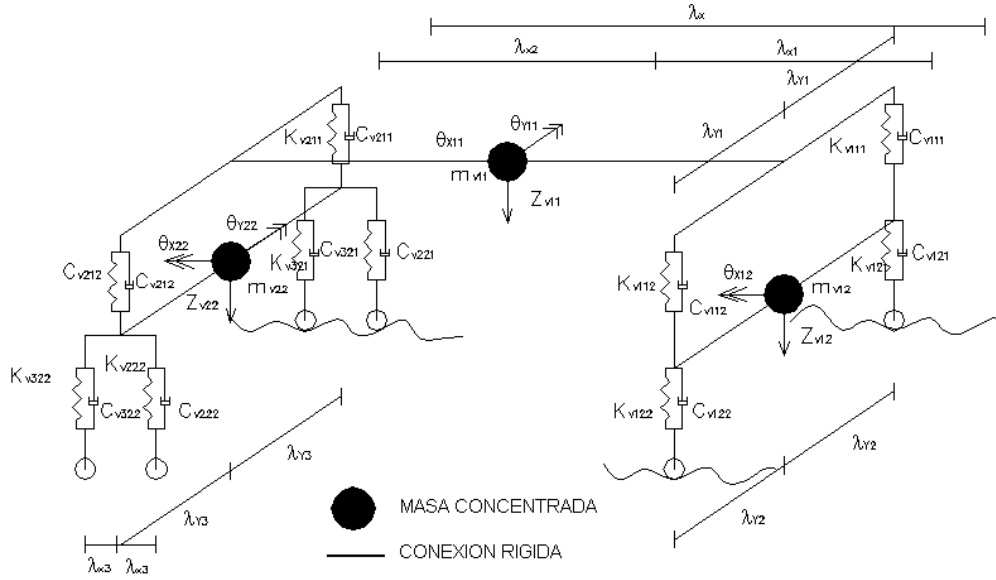


Figura 2.5: Modelo del vehículo.

resortes son los términos  $K_{vmku}$  y las constantes de amortiguamiento son los términos  $C_{vmku}$ ; el subíndice  $k$  indica si se trata del cuerpo del vehículo ( $k=1$ ) o el eje ( $k=2$ ), el subíndice  $m$  indica a cual eje corresponde, ( $m=1$ ) es el eje delantero y ( $m=2,3$ ) son los ejes traseros y el subíndice  $u$  indica si se trata del lado izquierdo o derecho respectivamente. El signo es tomado positivo si la deformación ocurre hacia abajo, el giro del eje en la dirección longitudinal es tomado positivo si ocurre de atrás hacia adelante y en la dirección transversal si ocurre de derecha a izquierda.

## 2.4. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA PUENTE VEHÍCULO.

Las ecuaciones que gobiernan la interacción puente-vehículo se obtienen del método de la energía usando la ecuación de Lagrange del movimiento como se muestra en la ecuación 2.20:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial U_d}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.20)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema;  $V$  la energía potencial del sistema  $U_d$  la energía de disipación y  $q_i$  la  $i$ -ésima coordenada generalizada.

La energía cinética y potencial incluyendo la energía de deformación y disipación de la interacción puente vehículo se pueden expresar en coordenadas generalizadas como sigue:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}^T \mathbf{M}_b \dot{\mathbf{D}} \\
& + \frac{1}{2} \left( m_{v11} \dot{Z}_{11}^2 + J_{y11} \dot{\theta}_{y11}^2 + J_{x11} \dot{\theta}_{x11}^2 + J_{y22} \dot{\theta}_{y22}^2 + m_{v12} \dot{Z}_{12}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( m_{v22} \dot{Z}_{22}^2 + J_{x12} \dot{\theta}_{x12}^2 + J_{x22} \dot{\theta}_{x22}^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}^T \mathbf{K}_b \dot{\mathbf{D}} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \left[ K_{vm1u} R_{m1u}^2 + K_{vm2u} (R_{m2u} + Z_{0mu})^2 + 2W_{mu} Z_{0mu} \right]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}^T \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{D}} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \left[ C_{vm1u} \dot{R}_{m1u}^2 + C_{vm2u} \left( \dot{R}_{m2u} + \dot{Z}_{0mu} \right)^2 + \dot{Z}_{0mu} \right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

donde:

$$Z_{0mu} = w(t, x_{mu}) - Z_{rmu} \tag{2.24}$$

$$R_{mku} = \begin{cases} Z_{11} - (-1)^m \lambda_{xm} \theta_{y11} - (-1)^u \lambda_{y1} \theta_{x11} - Z_{m2} + (-1)^u \lambda_{y(m+1)} \theta_{xm2} \\ \quad m = 1, 2; k = 1; u = 1, 2 \\ Z_{12} - (-1)^u \lambda_{y2} \theta_{x12} \quad m = 1; k = 2; u = 1 \\ Z_{22} - (-1)^m \lambda_{x3} \theta_{y2} - (-1)^u \lambda_{y3} \theta_{x22} \quad m = 2, 3; k = 2; u = 1, 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{2.25}$$

$$W_{mu} = \begin{cases} \frac{1}{2} g \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_{x1}}{\lambda_x} \right) m_{v11} + m_{v12} \right] & m = 1; u = 1, 2 \\ \frac{1}{4} g \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_{x2}}{\lambda_x} \right) m_{v11} + m_{v22} \right] & m = 2, 3; u = 1, 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{2.26}$$

El término  $J$  en la ecuación 2.21 representa el momento de inercia del vehículo y  $g$  en la ecuación 2.26 la gravedad. En la ecuaciones 2.21 a 2.26,  $\mathbf{D}$  y  $\dot{\mathbf{D}}$  representan el vector de desplazamientos y velocidades del puente respectivamente;  $\mathbf{M}_b$  y  $\mathbf{K}_b$  son respectivamente las matrices de masa y rigidez reducida del puente,  $\mathbf{C}_b$  es la matriz de amortiguamiento del puente obtenida de la suposición de amortiguamiento proporcional a las matrices de masa y rigidez, como en la ecuación 2.27.

$$\mathbf{C}_b = p\mathbf{M}_b + q\mathbf{K}_b \quad (2.27)$$

donde

$$p = \frac{2\omega_1\omega_2(h_1\omega_2 - h_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.28)$$

$$q = \frac{2(h_2\omega_2 - h_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.29)$$

En las ecuaciones 2.28 y 2.29,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son la primera y segunda frecuencias circulares del sistema puente.  $h_1$  y  $h_2$  son constates de amortiguamiento acuerdo a los dos modos de vibración con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

El vector de desplazamientos del puente puede escribirse en términos de coordenadas normales como en la ecuación 2.30.

$$\mathbf{D} = \sum_{j=1}^n \phi_j a_j = \mathbf{\Phi} \mathbf{a} \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{\Phi}$  y  $\mathbf{a}$  son la matriz modal y el vector de desplazamientos generalizado.

Los desplazamientos del puente  $w(t, x_{mu})$  se pueden obtener utilizando una combinación de desplazamientos y vectores de distribución, de la siguiente manera.

$$w(t, x_{mu}) = \mathbf{\Psi}_{mu}^T \mathbf{D} \quad (2.31)$$

donde  $\Psi_{mu}$  es un vector de distribución que reparte la carga a través del elemento de placa a cada uno de los nodos y se representa como 2.32,

$$\Psi_{mu} = [0; \dots; 0; \psi_{k,mu}(t); \psi_{k+1,mu}(t); \psi_{k+2,mu}(t); \psi_{k+3,mu}(t); \dots; 0] \quad (2.32)$$

La formulación de la ecuación diferencial que gobierna el sistema interacción puente-vehículo se obtiene de las relaciones en las ecuaciones 2.20 a 2.32 resultando:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_b \ddot{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{C}}_b \dot{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{K}}_b \mathbf{a} &+ \mathbf{\Phi}^T \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \Psi_{mu} (C_{vm2u} \mathbf{\Psi}_{mu}^T \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{a}} + K_{vm2u} \mathbf{\Psi}_{mu}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{a}) \\ &- \mathbf{\Phi}^T \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \Psi_{mu} (C_{vm2u} \dot{R}_{m2u} + K_{vm2u} R_{m2u}) \\ &= \mathbf{\Phi}^T \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \Psi_{mu} (W_{mu} + C_{vm2u} \dot{Z}_{m2u} + K_{vm2u} Z_{m2u}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$m_{v11} \ddot{Z}_{11} + \sum_{m=1}^2 \sum_{u=1}^2 (C_{vm1u} \dot{R}_{m2u} + K_{vm1u} R_{m1u}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} m_{v12} \ddot{Z}_{12} &- \sum_{u=1}^2 (C_{v12u} \mathbf{\Psi}_{1u}^T \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{a}} + K_{v12u} \mathbf{\Psi}_{1u}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{a}) \\ &- \sum_{k=1}^2 \sum_{u=1}^2 (-1)^k (C_{v1ku} \dot{R}_{1ku} + K_{v1ku} R_{1ku}) \\ &= - \sum_{u=1}^2 (C_{v12u} \dot{Z}_{r1u} + K_{v12u} Z_{r1u}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} m_{v22} \ddot{Z}_{22} &- \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (C_{vm2u} \mathbf{\Psi}_{mu}^T \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{a}} + K_{vm2u} \mathbf{\Psi}_{mu}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{a}) \\ &+ \sum_{m=2}^3 \sum_{k=1}^2 \sum_{u=1}^2 (-1)^k (C_{vmku} \dot{R}_{mku} + K_{vmku} R_{mku}) \\ &= - \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (C_{vm2u} \dot{Z}_{rmu} + K_{vm2u} Z_{rmu}) \end{aligned} \quad (2.36)$$



$$J_{x11}\ddot{\theta}_{x11} - \sum_{m=1}^2 \sum_{u=1}^2 (-1)^u \lambda_{y1} \left( C_{vm1u} \dot{R}_{m1u} + K_{vm1u} R_{m1u} \right) = 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} J_{x12}\ddot{\theta}_{x12} &+ \sum_{u=1}^2 (-1)^u \lambda_{y2} \left( C_{v12u} \Psi_{1u}^T \Phi \dot{\mathbf{a}} + K_{v12u} \Psi_{1u}^T \Phi \mathbf{a} \right) \\ &- \sum_{k=1}^2 \sum_{u=1}^2 (-1)^k (-1)^u \lambda_{y2} \left( C_{v1ku} \dot{R}_{1ku} + K_{v1ku} R_{1ku} \right) \\ &= \sum_{u=1}^2 (-1)^k \lambda_{y2} \left( C_{v12u} \dot{Z}_{r1u} + K_{v12u} Z_{r1u} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} J_{x22}\ddot{\theta}_{x22} &+ \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (-1)^u \lambda_{y3} \left( C_{vm2u} \Psi_{mu}^T \Phi \dot{\mathbf{a}} + K_{vm2u} \Psi_{mu}^T \Phi \mathbf{a} \right) \\ &- \sum_{m=2}^3 \sum_{k=1}^2 \sum_{u=1}^2 (-1)^k (-1)^u \lambda_{y3} \left( C_{vmku} \dot{R}_{mku} + K_{vmku} R_{mku} \right) \\ &= \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 \lambda_{y3} \left( C_{vm2u} \dot{Z}_{rmu} + K_{vm2u} Z_{rmu} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$J_{x11}\ddot{\theta}_{x11} - \sum_{m=1}^3 \sum_{u=1}^2 \lambda_{xm} \left( C_{vm1u} \dot{R}_{m1u} + K_{vm1u} R_{m1u} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} J_{y22}\ddot{\theta}_{y22} &- \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (-1)^m \lambda_{x3} \left( C_{vm2u} \Psi_{mu}^T \Phi \dot{\mathbf{a}} + K_{vm2u} \Psi_{mu}^T \Phi \mathbf{a} \right) \\ &+ \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (-1)^m \lambda_{x3} \left( C_{vm2u} \dot{R}_{m2u} + K_{vm2u} R_{m2u} \right) \\ &= - \sum_{m=2}^3 \sum_{u=1}^2 (-1)^m \lambda_{y3} \left( C_{vm2u} \dot{Z}_{rmu} + K_{vm2u} Z_{rmu} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $\bar{\mathbf{M}}_b$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_b$  y  $\bar{\mathbf{K}}_b$  son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez normalizadas. Esto es,  $\bar{\mathbf{M}}_b = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}_b \mathbf{\Phi}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_b = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_b \mathbf{\Phi}$  y  $\bar{\mathbf{K}}_b = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_b \mathbf{\Phi}$ .

Las ecuaciones de la interacción puente-vehículo se pueden representar en forma matricial al combinar las ecuaciones de la 2.33 a la 2.41:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}_s \mathbf{W} = \mathbf{F}_s \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  y  $\mathbf{K}_s$  indican las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez del sistema interacción puente-vehículo, respectivamente. Por otro lado,  $\ddot{\mathbf{W}}$ ,  $\dot{\mathbf{W}}$  y  $\mathbf{W}$  son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento para el sistema.

La carga dinámica de las llantas del vehículo son estimadas mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} P_{mu}(t) = W_{mu} &+ C_{vm2u} \left[ \dot{R}_{m2u} - \left( \Psi_{mu}^T \Phi \dot{\mathbf{a}} - \dot{Z}_{rmu} \right) \right] \\ &+ K_{vm2u} \left[ R_{m2u} - \left( \Psi_{mu}^T \Phi \mathbf{a} - Z_{rmu} \right) \right] \quad m = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

La ecuación dinámica de la interacción puente-vehículo es un problema dinámico no estacionario dado que los coeficiente de las matrices varían de acuerdo con la posición del vehículo. Para resolver las ecuaciones diferenciales simultaneas se utiliza convencionalmente el método de integración de Newmark  $\beta$ .

#### 2.4.1. Modelo de la superficie del puente.

Las superficies de rodadura del puente se pueden obtener mediante simulación basada en una función de densidad espectral de potencia, asumiendo que el proceso es aleatorio gaussiano estacionario con media cero. La función de densidad espectral de potencia de la rugosidad de la superficie corresponde a la ecuación 2.44:

$$S(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^n + \beta^n} \quad (2.44)$$

donde  $\Omega(\omega/2\pi)$  es la frecuencia *ciclo/min*;  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de rugosidad y de forma y  $n$  expresa la distribución de la potencia de una curva de densidad espectral dada. El estado de rugosidad de la vía en este trabajo es de categoría *A* corresponde a condición muy suave según

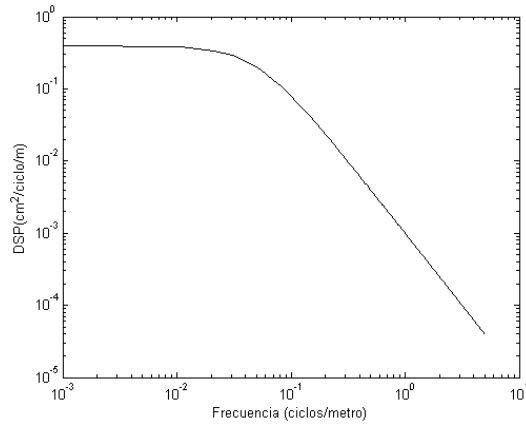


Figura 2.6: Densidad espectral de potencia para la vía del puente.

la ISO 8608 y posee los siguientes parámetros:  $\alpha = 0,001 \text{ cm}^2/\text{c}/\text{m}$ ,  $\beta = 0,05$  y  $n = 2,0$  (Soong T y Grigoriu M. [51]).

La figura 2.6 muestra la curva de densidad espectral de potencia de la rugosidad de la vía y la figura 2.7 muestra una realización para el caso de la vía considerada.

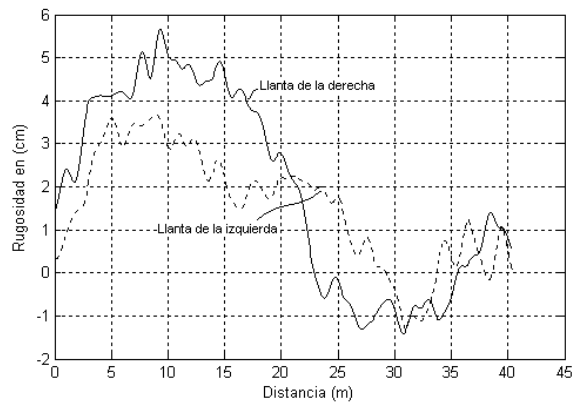
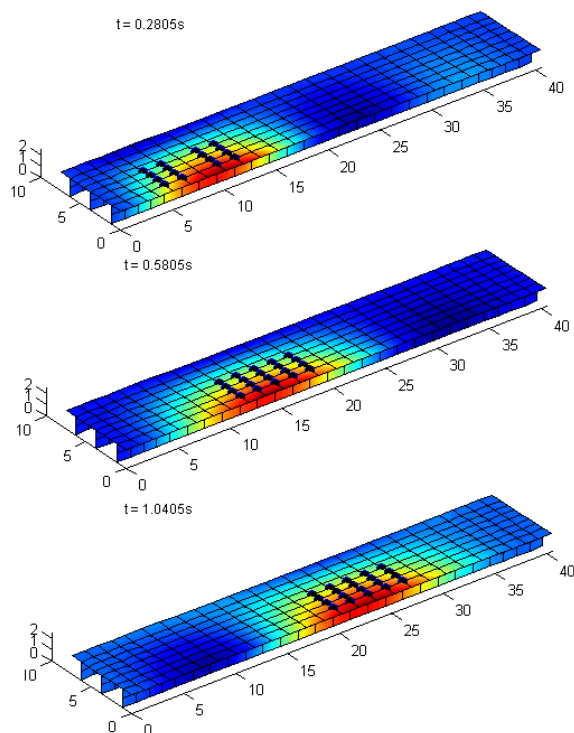
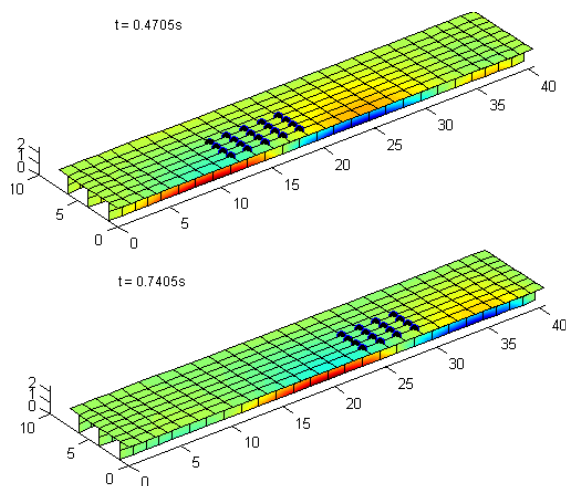


Figura 2.7: Realización del perfil de la vía.

## 2.5. RESPUESTA DEL PUENTE AL PASO DEL VEHÍCULO.

En las siguientes gráficas se presenta la respuesta del puente al paso de un vehículo que circula sobre él.

Figura 2.8: Distribución del desplazamiento en  $z$ .Figura 2.9: Distribución del desplazamiento en  $x$ .

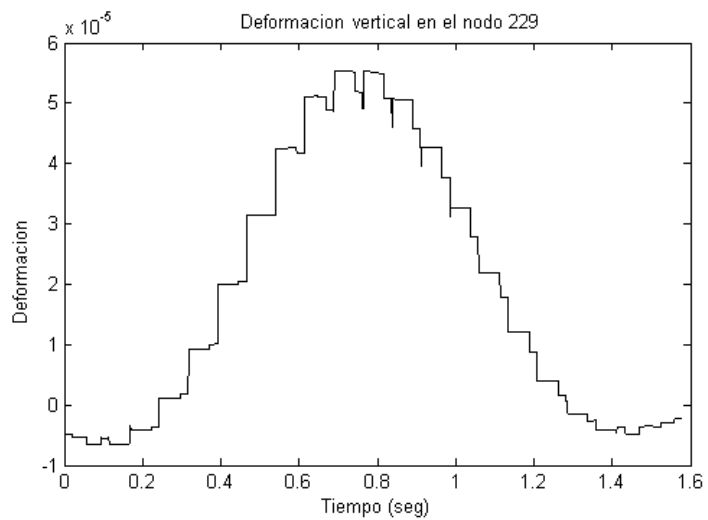


Figura 2.10: Deformación en z en el nodo 229.

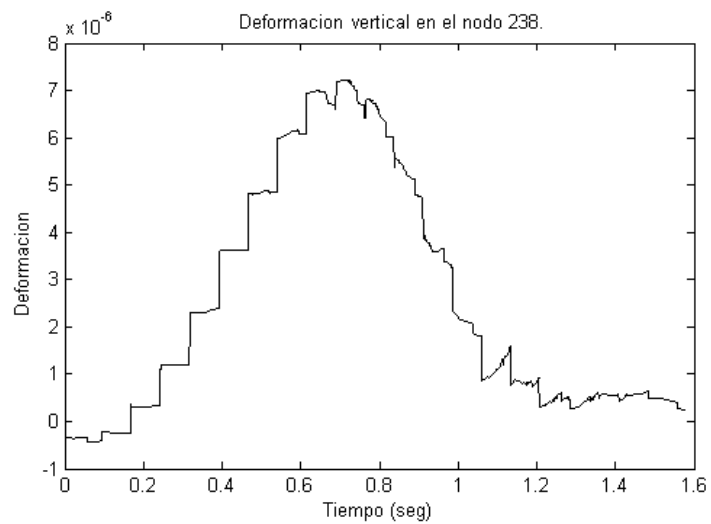


Figura 2.11: Deformación en z en el nodo 238

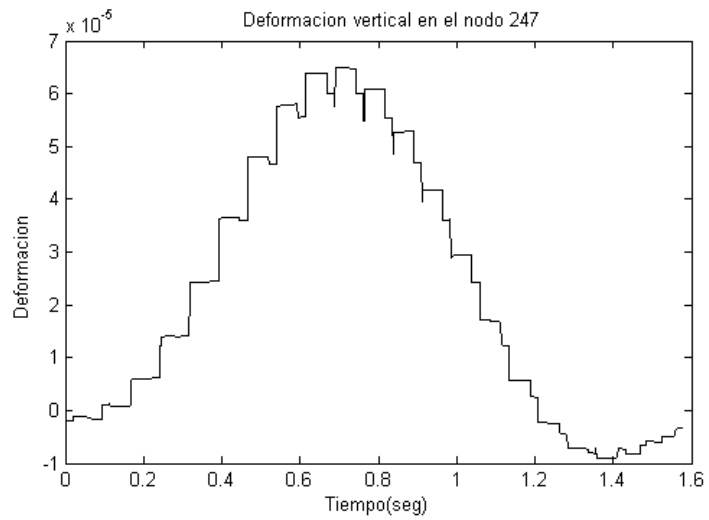
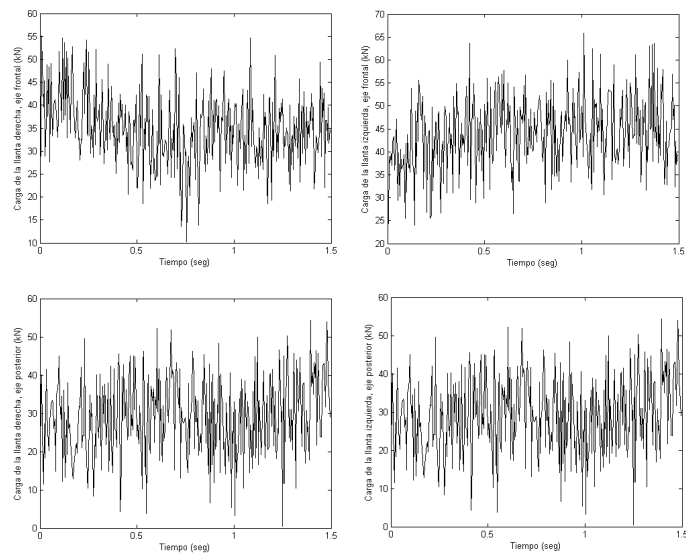


Figura 2.12: Deformación en z en el nodo 247.

Figura 2.13: Cargas dinámicas de las llantas para un vehículo que circula a  $82,73 \text{ km/h}$ .

## Capítulo 3

# ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Para entender la discretización que se realiza en el método de elementos finitos estocástico, es bueno comenzar considerando un sistema mecánico con geometría determinista  $\Omega$ , propiedades de los materiales y cargas. La evolución de tal sistema es gobernada por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, unas condiciones de borde asociadas y un estado inicial. En la mayor parte de los casos no se dispone de una solución exacta de tales ecuaciones, así que se utiliza un procedimiento de discretización que permite que el problema sea resuelto de manera numérica. En el método de elementos finitos la geometría se reemplaza por una malla de elementos finitos en la cual la geometría es sustituida por una serie de puntos  $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$  que son los nodos de tal malla. Correspondientemente las respuestas del sistema, es decir, el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(x)$  se aproxima mediante los desplazamientos nodales  $\{u^i, i = 1, \dots, N\}$  que son las entradas de un vector  $\mathbf{U}$ . Finalmente la ecuación diferencial es transformada en un sistema de ecuaciones en  $\{u^i\}_{i=1}^N$ . La figura 3.1, muestra como se realiza el proceso de discretización del sistema mecánico para obtener el modelo en elementos finitos (Hughes T. [54]).

Si las propiedades del material (por ejemplo el módulo de Young) son modeladas como un campo aleatorio, el sistema es gobernado ahora por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas (Yan Y. [58]), en este caso la respuesta será el campo de desplazamientos aleatorio  $\mathbf{u}(x, \theta)$ , donde  $\theta$  denota una salida básica en el espacio de posibles salidas  $\Theta$  (Sudret B. [10]). El método de elementos finitos estocástico espectral (SSFEM) propuesto por Ghanem y Spanos [22] es una aproximación que involucra campos aleatorios, en el cual se realizan dos discretizaciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas que gobiernan el problema en consideración, una en el dominio espacial y otra en el dominio probabilista. La respuesta, es decir el campo de desplazamientos es calculado como una expansión en variables aleatorias (Sudret B, Der Kiureghian.[52]).

En este capítulo se revisa inicialmente las distintas aproximaciones que se han utilizado para

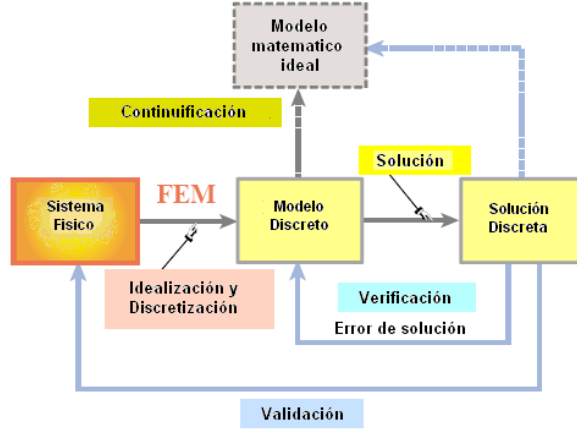


Figura 3.1: FEM físico. El sistema físico es la fuente del proceso.

tratar los sistemas estocásticos, luego se desarrollan los aspectos claves del modelamiento haciendo uso del SSFEM el cual involucra conceptos como las expansiones de Karhunen-Loève y el caos polinomial.

### 3.1.1. Modelo matemático estocástico.

El modelo físico bajo consideración involucra un medio cuyas propiedades exhiben fluctuaciones aleatorias y las cuales están sujetas a excitaciones externas también aleatorias. La representación matemática de este problema es la siguiente (Ghanem R G, Spanos P D. [22]):

$$\Lambda(\mathbf{x}, \theta) u(\mathbf{x}, \theta) = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.1)$$

donde  $\Lambda$  es un operador diferencial con coeficientes que exhiben fluctuaciones aleatorias con respecto a una o más variables independientes. El objetivo es entonces resolver la ecuación para la respuesta  $u(\mathbf{x}, \theta)$  como una función de ambos argumentos. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $\Lambda$  es un operador diferencial cuyos coeficientes aleatorios se restringen a procesos aleatorios de segundo orden y que cada uno de estos coeficientes  $a_k(\mathbf{x}, \theta)$  puede ser descompuesto en una componente completamente aleatoria y otra puramente determinista de la siguiente manera:

$$a_k(\mathbf{x}, \theta) = \bar{a}_k(\mathbf{x}) + h_k(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.2)$$

donde  $\bar{a}_k(\mathbf{x})$  es igual a la esperanza matemática del proceso  $a_k(\mathbf{x}, \theta)$  y  $h_k(\mathbf{x}, \theta)$  es un proceso aleatorio de media cero que tiene la misma función de covarianza que el proceso  $a_k(\mathbf{x}, \theta)$ . La



ecuación 3.1 puede ser reescrita como:

$$[L(\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}, \theta)] u(\mathbf{x}, \theta) = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.3)$$

donde  $L(\mathbf{x})$  es un operador diferencial determinístico y  $\Pi(\mathbf{x}, \theta)$  es un operador diferencial cuyos coeficientes son procesos de media cero.

Una forma bastante general del proceso solución es la siguiente (Sudret B. [10]):

$$u = g[\alpha_k(\mathbf{x}, \theta), f(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x}] \quad (3.4)$$

Una descripción completa de la respuesta debería involucrar las distribuciones conjuntas de los distintos procesos que aparecen en la ecuación 3.4 (Keese A. [4]), sin embargo dada la estructura dimensional infinita del proceso en la ecuación 3.4 hace que esta tarea exceda la capacidad de los métodos actuales, así que para poder obtener una solución mediante computador es necesaria una descripción de dimension finita del proceso involucrado. Por otro lado, debido a la naturaleza abstracta del espacio sobre el cual los procesos aleatorios se definen no es posible realizar una discretización del espacio similar a la realizada comúnmente en el caso del método de elementos finitos determinístico, siendo necesario que el proceso de discretización se realice respecto a una medida espectral.

## 3.2. APROXIMACIONES A LA SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

### 3.2.1. Métodos de perturbación

La teoría de probabilidad se introduce en la mecánica para estimar la variabilidad de la respuesta del sistema, es decir la dispersión de la respuesta alrededor de la media cuando los parámetros de entrada varían ellos mismos alrededor de sus propias medias (Rahman S. Rao B. [8]). La idea principal es entender como se propagan las incertidumbres a través del sistema mecánico (Sudret B, Der Kiureghian. [52]).

Como se sabe de la teoría de elementos finitos la ecuaciones que describen el sistema global pueden ser escritas como:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  el vector de desplazamientos desconocidos y  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas nodales equivalentes.

Asumiendo que la estructura involucra propiedades geométricas y/o materiales aleatorios y que está sujeto a fuerzas externas aleatorias, cada una de estas cantidades se describe mediante un conjunto de  $N$  variables aleatorias, siendo cada variable aleatoria representada por la suma de su valor medio y una variable aleatoria  $\alpha_i$  de media cero. Las variaciones de la entrada alrededor de la media son coleccionadas en un vector de variables aleatoria de media cero  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ .

En el análisis de elementos finitos, los métodos de segundo orden apuntan a evaluar las estadísticas de los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones a partir de los valores medios de las variables de entrada y la matriz de covarianza de los  $\alpha$ 's (Van den Nieuwenhof B. [?]).

Al aplicar la técnica de perturbación, cada una de las cantidades estocásticas que aparecen en la ecuación 3.5 puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de los valores medios, como sigue (Schwab C, Smith P, Stuart A. [49]):

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha\|^2) \quad (3.6)$$

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N U_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha\|^2) \quad (3.7)$$

$$F = F_0 + \sum_{i=1}^N F_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha\|^2) \quad (3.8)$$

Donde  $K_0$ ,  $U_0$ ,  $F_0$  son los valores medios de los parámetros de entrada y donde los coeficientes de primer orden  $()_i^I$  y de segundo orden  $()_{ij}^{II}$  son obtenidos de la primera y segunda derivada respectivamente de las correspondientes cantidades evaluadas en  $\alpha = 0$ .

Al sustituir 3.6-3.8 en 3.5 obtenemos un sistema de ecuaciones recursivas:

$$U^0 = K_0^{-1} F^0 \quad (3.9)$$

$$U_i^I = K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U^0) \quad (3.10)$$

$$U_{ij}^{II} = K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_{ij}^{II} U^0) \quad (3.11)$$

A partir de estas expresiones, las estadísticas de  $U$  se pueden obtener inmediatamente de los valores  $\alpha$ . Si truncamos la expansión en series de la ecuación 3.6 después del término de

perturbación de segundo orden, obtenemos una solución de perturbación de segundo orden para la media y la covarianza de los desplazamientos  $U$ :

$$E[U] \approx U^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{II} Cov[\alpha_i, \alpha_j] \quad (3.12)$$

$$Cov[U, U] \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_i^I (U_j^I)^T Cov[\alpha_i, \alpha_j] \quad (3.13)$$

Introduciendo los coeficientes de correlación de las variables aleatorias  $(\alpha_i, \alpha_j)$ : la ecuación 3.13 se transforma en:

$$Cov[U, U] \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_i^I (U_j^I)^T \rho_{ij} \sigma_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_j} \quad (3.14)$$

### 3.2.2. Simulación de Monte carlo

La utilidad del método de Simulación de Monte Carlo (MCS) se fundamenta en el hecho de que la mejor manera de obtener la función de distribución de probabilidad de una cierta cantidad aleatoria es mediante una población suficientemente grande de esta [Proppe C. Pradlwarter H.J. Schuëller G.I. [23], Bhattacharya B. Chakraborty S. [48]]. La implementación del método consiste en la simulación numérica de una población correspondiente a las cantidades aleatorias del problema físico, resolviendo el problema determinístico asociado con cada uno de los miembros de la población, de esta manera se obtiene una población de la cantidad aleatoria de respuesta, tal población puede ser usada para obtener las estadísticas de las cantidades de respuesta (Ghanem R G, Spanos P D.[22]).

El método Monte Carlo ha sido empleado como método de fuerza bruta para evaluar la validez de otras aproximaciones. En el caso concreto de los sistemas estructurales en los cuales está involucrado el método de elementos finitos, las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas se pueden representar como en la ecuación 3.3, la cual se repite por conveniencia:

$$[L(x) + \Pi(\alpha(x, \theta), x)] [u(\alpha(x, \theta), x)] = f(x, \theta) \quad (3.15)$$

donde  $L$  es un operador diferencial determinista,  $\Pi$  es un operador diferencial estocástico,  $u$  y  $f$  son respectivamente el desplazamiento y la fuerza, los cuales presentan una dependencia aleatoria. La ecuación 3.15 involucra generalmente la realización numérica de los procesos aleatorios  $\alpha(x, \theta)$  y  $f(x, \theta)$ , los cuales se obtienen con la aplicación del MCS y luego se procede con la solución de la ecuación determinística para  $u(\alpha(x, \theta), x)$  en un valor fijo de  $\theta$ . Este proceso es repetido cierto número de veces para diferentes valores de  $\theta \in \Theta$ .

### 3.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS ESPECTRALES

#### 3.3.1. Modelo Matemático

El problema tratado en este documento no es convencional en el terreno de la ingeniería civil e involucra conceptos de mayor abstracción y naturaleza matemática; por tal razón se considera pertinente introducir ciertos conceptos que se utilizarán en lo subsecuente. También es necesario aclarar aspectos de la notación para simplificar la complejidad matemática.

#### 3.3.2. Elementos finitos deterministas

Antes de revisar los detalles del método de elementos finitos estocásticos, es importante revisar el caso determinista, en este caso el espacio  $\Omega$  de eventos elementales se reduce a un único elemento, coincidiendo con la realización del problema,

$$L(\mathbf{x})[u(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.16)$$

La ecuación 3.16 puede ser vista como un mapeo desde el espacio sobre el cual la respuesta  $u(x)$  está definida hacia el espacio sobre el cual se define la excitación  $f(x)$ . El dominio del operador  $L(x)$ , en el cual se expande la solución, es determinado por la forma espacial de  $L(x)$ , como también las condiciones de borde y las condiciones iniciales asociadas con el problema físico. Asumiendo que  $L(x)$  es un operador diferencial de  $m$  –ésimo orden, sea  $C^m$  el espacio de todas las funciones que son diferenciables  $m$  veces (Buchern Ch, Most T. [13]). Entonces el espacio solución es algún subespacio de  $C^m$  cuyos elementos satisfacen las condiciones de frontera esenciales del problema. La función solución  $u(x)$  puede ser expandida a lo largo de una base en este espacio, la ecuación 3.16 toma la siguiente forma:

$$L(x) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} u_i g_i(x) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i L(x)[g_i(x)] = f(x) \quad (3.17)$$

donde  $u_i$  es una componente de la solución  $u(x)$  a lo largo de la base  $g_i(x)$ . La sumatoria anterior será truncada a partir del  $N$  –ésimo término y el problema es entonces calcular las coordenadas  $\{u_i\}$  de la respuesta  $u(x)$  con respecto a la base de dimensión finita  $\{g_i(x)\}_{i=1}^N$  (Ngah M.F. Young A. [5]).

La formulación de los elementos finitos estocásticos que se presenta en este documento se basa en una proyección de Galerkin en el espacio  $\Theta$  de variables aleatorias.

### 3.3.3. Procesos de discretización del campo aleatorio

Un procedimiento de discretización es la aproximación del campo aleatorio  $H(\cdot)$  mediante  $\hat{H}(\cdot)$  (Brennan D, Akpan I, Konuk A. [12], Huang S. Mahadevan S, Rebba R. [28]), el cual se define por medio de un conjunto finito de variables aleatorias  $\{\chi_i, i = 1, \dots, n\}$ . Los métodos de discretización se dividen en tres grupos:

1. Discretización por puntos: donde las variables aleatorias  $\{\chi_i\}$  son valores seleccionados de  $H(\cdot)$  en algunos puntos dados  $\mathbf{x}_i$ .
2. Discretización promedio: donde las variables aleatorias  $\{\chi_i\}$  son integrales ponderadas de  $H(\cdot)$  sobre el dominio  $\Omega_e$ , siendo este el dominio del elemento.

$$\chi_i = \int_{\Omega_e} H(x) w(x) d\Omega \quad (3.18)$$

3. Métodos de expansión en series: donde los campos aleatorios se representan como una serie que involucra variables aleatorias y funciones espaciales deterministas, en este caso la aproximación se obtiene luego de truncar la serie.

Para una mejor ilustración del tema refiérase a Sudret B, Der Kiureghian.[52]

### 3.3.4. Campos aleatorios y espacios de Hilbert relacionados

El espacio de Hilbert de funciones definido sobre el dominio  $\Omega$  (donde  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^d$ , que describe el sistema geométrico y cada uno de sus elementos se denota por  $x$ ) con valores en la línea real, se denota por  $\mathbf{H}$ , el cual es un espacio completo (Acharjee S, Zabaras N.[7]). El espacio vectorial de variables aleatorias reales con momento segundo finito ( $E[X^2] < \infty$ ) es denotado por  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ , donde un elemento de  $\Theta$  es  $\theta$ . La operación de esperanza permite definir el siguiente producto punto (Kowalsky U. Zümendorf T. Dinkler D. [17]):

$$\langle X, Y \rangle \equiv E[XY] \quad (3.19)$$

$$\|X\| = \sqrt{E[X^2]} \quad (3.20)$$

$\mathcal{L}^2$  es un espacio completo, esto hace que sea a su vez un espacio de *Hilbert*.

El espacio de funciones que mapean  $\Theta$  en la línea real se denota como  $\Phi$ , cada uno de estos mapeos define una variable aleatoria. Un campo aleatorio  $H(x, \theta)$  puede ser definido como una curva en el espacio de Hilbert, el cual es una colección de variables aleatorias indexadas por un parámetro continuo  $x \in \Omega$ . Esto significa que para un  $x_0$ ,  $H(x_0, \theta)$  es una *variable aleatoria*.

Inversamente, para una salida dada  $\theta_0$ ,  $H(x, \theta_0)$  es una *realización* del campo.

Los productos internos sobre  $\mathbf{H}$  son definidos utilizando la medida de Lebesgue. Esto es, para dos elementos cualquiera de  $\mathbf{H}$  su producto interno es definido como:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) g(x) d\Omega \quad (3.21)$$

### 3.3.5. Expansiones de Karhunen-Loève

Las expansiones de Karhunen-Loève de un campo aleatorio  $H(\cdot)$  se fundamentan en la descomposición espectral de su correspondiente función de autocovarianza  $C_{HH}(x_1, x_2)$  (Stefanou G. Papadrakakis M. [40], Guedria M. Bouhaddib N. Majeda R. [46]).

Sea  $H(x, \theta)$  un proceso aleatorios, el cual es función del vector de posición  $x$  definido sobre el dominio  $\Omega$  y  $\theta$  que pertenece al espacio de eventos aleatorio  $\Theta$ . Por definición, la función de covarianza es acotada, simétrica y positiva definida. así la descomposición espectral es (Ghanem R, Saad G, Doostan A. [21]):

$$C_{HH}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(x_1) f_n(x_2) \quad (3.22)$$

donde  $\lambda_n$  y  $f_n(x)$  son los valores propios y los vectores propios del kernel de covarianza, ellos son la solución de la ecuación integral:

$$\int_{\Omega} C_{HH}(x_1, x_2) \varphi_i(x) d\Omega_{x_1} = \lambda_i \varphi_i(x_2) \quad \forall i = 1, \dots \quad (3.23)$$

Debido a las propiedades mencionadas del kernel de covarianza, sus funciones propias son ortogonales y forman una base completa de  $\mathcal{L}^2$ . El conjunto de valores propios (espectro) es real, positivo, numerable y cero como el único punto posible de acumulación. Cualquiera de las realizaciones de  $H(\cdot)$  puede ser expandida sobre esta base como sigue:

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (3.24)$$

donde  $\{\xi_i(\theta), i = 1, \dots\}$  es un conjunto de variables aleatorias denotadas como las *coordenadas de la realización* del campo aleatorio con respecto al conjunto de funciones deterministas  $\{\varphi_i\}$ , además verifican que:

$$E[\xi_k \xi_l] = \delta_{kl} \quad (3.25)$$

$$E[\xi_k] = 0 \quad (3.26)$$

donde  $\{\xi_i(\theta), i = 1, \dots\}$  forma un conjunto de *variables aleatorias ortonormales*.

Finalmente se puede decir que 3.24 corresponde a una separación de las variables espaciales y aleatorias en  $H(x, \theta)$ .

Desde el punto de vista práctico, la importancia de la 3.24 es que se puede utilizar en un esquema de simulación para obtener realizaciones numéricas del proceso aleatorio.

### 3.3.6. Solución de la ecuación integral

La utilidad de la expansión de Karhunen-Loève está en la habilidad de resolver el problema de la ecuación integral de la forma (Schenk C.A. Pradlwarter H.J. Schuëller G.I. [24]):

$$\int_{\Omega} C_{HH}(x_1, x_2) \varphi_i(x_2) d\Omega_{x_2} = \lambda_i \varphi_i(x_1) \quad (3.27)$$

donde  $C_{HH}(x_1, x_2)$  es una función de autocovarianza. El hecho que el kernel  $C_{HH}(x_1, x_2)$  sea acotado, simétrico y definido positivo simplifica el análisis usual, pues garantiza un número de propiedades para las funciones propias y vectores propios que son la solución de la ecuación 3.28. Estas propiedades se listan a continuación (Lin W. Lee Z. K. Lu P. [43]):

1. El conjunto  $\varphi_i$  de funciones propias es ortogonal y completo.
2. Para cada valor propio  $\lambda_i$ , corresponde al menos un número finito de funciones propias linealmente independientes.
3. Existe al menos un conjunto infinito de funciones propias.
4. Los valores propios son todos números reales positivos.
5. El kernel  $C_{HH}(x_1, x_2)$  admite la siguiente expansión convergente:

$$C_{HH}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x_1) \varphi_i(x_2) \quad (3.28)$$

La ecuación 3.28 puede ser resuelta analíticamente para unas pocas funciones de autocovarianza y geometrías  $\Omega$ . En la presente sección se presenta la solución en forma exacta para la función de autocovarianza exponencial en dos dimensiones. Ghanemm y Spanos [22] presentaron el análisis detallado para esta función de autocovarianza, por su parte Sudret [10] presentó la forma de la solución numérica del problema de la ecuación integral.

El kernel considerado está dado en la siguiente ecuación:

$$C_{HH}(x_1, x_2) = e^{|x_1 - x_2|/b} \quad (3.29)$$

donde  $b$  es un parámetro con las mismas unidades de  $x$  y es frecuentemente denominado la longitud de correlación, dado que refleja la tasa a la cual la correlación decae entre dos puntos del proceso. Se asume que el proceso está definido sobre un intervalo unidimensional  $[-a, a]$ ; en este caso las funciones propias y valores propios de la función de covarianza 3.29 son la solución de la siguiente ecuación integral:

$$\int_{-a}^a e^{-c|x_1 - x_2|} \varphi_i(x_2) dx_2 = \lambda \varphi_i(x_1) \quad (3.30)$$

donde  $c = 1/b$ . Esta ecuación se puede reescribir como

$$\int_{-a}^x e^{-c(x_1 - x_2)} \varphi_i(x_2) dx_2 + \int_x^a e^{c(x_1 - x_2)} \varphi_i(x_2) dx_2 = \lambda \varphi_i(x_1) \quad (3.31)$$

Diferenciando 3.31 respecto a  $x_1$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda \varphi_i'' = -c \int_{-a}^x e^{-c(x_1 - x_2)} \varphi_i(x_2) dx_2 + c \int_x^a e^{c(x_1 - x_2)} \varphi_i(x_2) dx_2 \quad (3.32)$$

Diferenciando de nuevo respecto a  $x_1$  se llega a

$$\lambda \varphi_i''(x) = (-2c + c^2 \lambda) \varphi_i(x) \quad (3.33)$$

Introduciendo una nueva variable:

$$w^2 = \frac{2c - c^2 \lambda}{\lambda} \quad (3.34)$$

la ecuación 3.32 se convierte en:

$$\varphi_i''(x) + w^2 \varphi_i(x) = 0 \quad -a \leq x \leq +a \quad (3.35)$$



Para encontrar las condiciones de borde asociadas a la ecuación diferencial 3.35, se evalúan las ecuaciones 3.32 y 3.33 en  $x = -a$  y  $x = a$ , así, las condiciones de borde son:

$$c\varphi_i(a) + \varphi_i'(a) = 0 \quad (3.36)$$

$$c\varphi_i(-a) + \varphi_i'(-a) = 0 \quad (3.37)$$

De esta manera, la ecuación integral 3.30 se transforma en la ecuación diferencial ordinaria 3.35 junto con las condiciones de frontera dadas por 3.36 y 3.37.

La solución tiene la forma,

$$\varphi_i(x) = a_1 \cos(wx) + a_2 \sin(wx) \quad (3.38)$$

Luego de aplicar las condiciones de borde especificadas en las ecuaciones 3.36 y 3.37 se puede llegar finalmente a las funciones propias siguientes:

$$\varphi_i(x) = \frac{\cos(w_i x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2w_i a)}{2w_i}}} \quad (3.39)$$

$$\varphi_{*i}(x) = \frac{\sin(w_{*i} x)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2w_{*i} a)}{2w_{*i}}}} \quad (3.40)$$

para el caso de  $i$  pares e impares respectivamente.

donde  $w_i$  es la solución de:

$$\frac{1}{b} \tan(w_i a) + w_i = 0 \text{ en el rango } \left[ (i-1) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right] \quad (3.41)$$

para el caso par y para el caso impar es,

$$\frac{1}{b} - w_i \tan(w_i a) = 0 \text{ en el rango } \left[ (i-1) \frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \right] \quad (3.42)$$

y los correspondientes valores propios son, en el mismo orden:

$$\lambda_i = \frac{2c}{w_i^2 + c^2} \quad (3.43)$$

y

$$\lambda_{*i} = \frac{2c}{w_{*i}^2 + c^2} \quad (3.44)$$

### 3.3.7. Caso dos dimensional

La solución del problema de valor propio para el caso dos dimensional es obtenida simplemente mediante el producto de la soluciones en una dimensión, esto es,

$$\lambda_i = \lambda_{i_1}^{1D} \cdot \lambda_{i_2}^{1D} \quad (3.45)$$

$$\varphi(x) = \varphi(x, y) = \varphi_{i_1}(x) \cdot \varphi_{i_2}(x) \quad (3.46)$$

donde los superíndices  $^{1D}$  representan las soluciones en una dimensión que se dieron en la sección previa.

### 3.3.8. Ecuación de equilibrio estocástica

En el marco de este trabajo se supondrá únicamente que el módulo de elasticidad es un campo aleatorio Gaussiano, de esta manera la matriz de elasticidad en el punto  $x$  puede escribirse como,

$$D(x, \theta) \equiv H(x, \theta) D_0 \quad (3.47)$$

donde  $D_0$  es una matriz constante. La siguiente es la expansión de Karhunen-Loève de  $H(\cdot)$ :

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (3.48)$$

puede ser sustituida junto con la ecuación 3.47 en la matriz de rigidez del elemento

$$k^e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega_e \quad (3.49)$$

obteniéndose:

$$k^e(\theta) = k_0^e + \sum_{i=1}^{\infty} k_i^e \xi_i(\theta) \quad (3.50)$$

donde  $k_0^e$  es la matriz de rigidez media del elemento y  $k_i^e$  son matrices deterministas obtenidas de la siguiente manera:

$$k_i^e = \sqrt{\lambda_i} \int_{\Omega_e} \varphi_i(x) B^T \cdot D_0 \cdot B d\Omega_e \quad (3.51)$$

Al ensamblar las contribuciones elementales se llega a la siguiente expresión,

$$\left[ K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} K_i \xi_i(\theta) \right] \cdot U(\theta) = F \quad (3.52)$$

En la ecuación anterior,  $K_i$  son matrices deterministas obtenidas por el ensamblaje de  $k_i^e$  de manera similar al caso determinista.

### 3.3.9. Representación de la respuesta utilizando el método de expansiones de Neumann

El vector de respuesta  $U(\theta)$  debería ser obtenido al invertir la ecuación 3.52; sin embargo no se tienen soluciones exactas (Lei Z. Qiu C. [15]). Una de las estrategias que adoptaron Ghanem y Spanos (Ghanem R G, Spanos P D. [22]) consiste en utilizar expansiones en series de Neumann de la inversa de la matriz de rigidez estocástica para llegar a una respuesta aproximada.

$$U(\theta) = \left[ I + \sum_{i=1}^{\infty} K_0^{-1} K_i \xi_i(\theta) \right]^{-1} \cdot U^0, \quad U^0 = K_0^{-1} \cdot F \quad (3.53)$$

La expansión en series de Neumann de la ecuación anterior tiene la forma:

$$U(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \sum_{i=1}^{\infty} K_0^{-1} K_i \xi_i(\theta) \right] U_0 \quad (3.54)$$

Con los primeros términos de esta expansión, la ecuación 3.54 queda de la siguiente manera,

$$U(\theta) = \left[ I - \sum_{i=1}^{\infty} K_0^{-1} K_i \xi_i(\theta) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_0^{-1} K_i K_0^{-1} K_j \xi_i(\theta) \xi_j(\theta) + \dots \right] U^0 \quad (3.55)$$

Las expansiones de Karhunen-Loève y de Neumann pueden ser truncadas para obtener una solución aproximada de  $U(\theta)$ .

### 3.3.10. Proyección de la respuesta sobre el caos homogéneo

El caos polinomial es una base particular del espacio de variables aleatorias  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$  el cual se basa en los polinomios de Hermite de variables normales estándar (Ghanem R, Saad G, Doostan A. [21]).

Un polinomio de Hermite en una dimensión se define como:

$$h_n(x) = (-1)^n \frac{d^n \left[ e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]}{dx^n} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (3.56)$$

Los polinomios de Hermite de variables aleatorias normales estándar son ortogonales con respecto al producto interno de  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ , esto es:

$$E[h_n(\xi_i(\theta)) h_m(\xi_j(\theta))] = 0, \quad m \neq n \quad (3.57)$$

Los polinomios de Hermite multidimensional pueden ser definidos como productos de polinomios de Hermite de variables aleatorias normales estándar. Para aclarar aspectos de su construcción, consideremos las siguientes secuencias de enteros:

$$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \quad \alpha_j \geq 0 \quad (3.58)$$

$$i = \{i_1, \dots, i_p\} \quad i_j > 0 \quad (3.59)$$

El polinomio de Hermite multidimensional asociado con las secuencias  $(i, \alpha)$  es

$$\Psi_{i, \alpha}(\theta) = \prod_{k=1}^p h_{\alpha_k}(\xi_{i_k}(\theta)) \quad (3.60)$$

Así,  $\{\Psi_{i, \alpha}\}$  que representa el conjunto de todos los polinomios asociados con todas las posibles secuencias  $(i, \alpha)$  de cualquier longitud  $p$ , forma una base de  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ .

Sea denotado como  $\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_p}(\theta))$  el conjunto de los polinomios base  $\{\Psi_{i,\alpha}(\theta) \mid \sum_{k=1}^p \alpha_k = p\}$  y sea  $\Gamma_p$  el espacio que estos expanden. Entonces  $\Gamma_p$  es un subespacio de  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ , que usualmente se denomina *Caos homogéneo de orden p* (Stefanou G. Papadrakakis M. [40]). Los subespacios  $\Gamma_p$  son ortogonales unos con otros en  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ . Consecuentemente la expansión de cualquier variable aleatoria  $u(\theta)$  en el caos polinomial puede ser escrita como:

$$u(\theta) = u_0\Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1}\Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} u_{i_1 i_2}\Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (3.61)$$

En esta expresión  $u_0, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}$  son las coordenadas de  $u(\theta)$  asociadas con el caos homogéneo de orden cero, primero y segundo respectivamente. El caos homogéneo de orden más bajo tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 \\ \Gamma_1(\xi_i) &= \xi_i \\ \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) &= \xi_{i_1}\xi_{i_2} - \delta_{i_1 i_2} \\ \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) &= \xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3} - \xi_{i_1}\delta_{i_3 i_1} - \xi_{i_2}\delta_{i_3 i_2} - \xi_{i_3}\delta_{i_1 i_2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

### 3.3.11. Representación general de la respuesta en $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$

Cada uno de los desplazamientos aleatorios  $u^i(\theta)$  de la ecuación 3.55 puede ser representado como una serie de polinomios en variables normales estándar  $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ . Reordenando los términos mediante el uso de un solo índice, la respuesta es:

$$u^i(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i \mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}) \quad (3.63)$$

donde  $\mathcal{P}_0 \equiv 1$  y  $\mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty})$  son polinomios en variables normales estándar, esto es,

$$\mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}) = \xi_{i_1}^{\alpha_1} \xi_{i_2}^{\alpha_2} \dots \xi_{i_p}^{\alpha_p} \quad (3.64)$$

El conjunto  $\{\mathcal{P}_j\}_{j=0}^{\infty}$  de la ecuación 3.64 forma una base en el espacio de variables aleatorias  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ , y los coeficientes  $u_j^i$  son interpretados como las coordenadas de  $u^i(\theta)$  en esta base.

Asumiendo que cualquier variable aleatoria  $u(\theta)$  de  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$  puede ser representada de la siguiente forma:

$$u(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Psi_j(\theta) \quad (3.65)$$

donde  $\{\Psi_j(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$  es un conjunto completo de variables aleatorias ortogonales definidas como polinomios en  $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$  que satisfacen:

$$\Psi_0 \equiv 1 \quad (3.66)$$

$$E[\Psi_j] = 0 \quad j > 0 \quad (3.67)$$

$$E[\Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta)] = 0 \quad j \neq k \quad (3.68)$$

La expresión del vector nodal de desplazamientos se puede escribir como,

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j \Psi_j(\theta) \quad (3.69)$$

Las coordenadas  $U_j$  son vectores deterministas de  $N$  componentes.

Denotando  $\xi_0(\theta) \equiv 1$  y sustituyendo la ecuación anterior en 3.52, se obtiene:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} K_i \xi_i(\theta) \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} U_j \Psi_j(\theta) \right) - F = 0 \quad (3.70)$$

Con propósitos computacionales las series que aparecen en la ecuación 3.70 son truncadas después de un número finito de términos, exactamente  $(M+1)$  para la expansión de la matriz de rigidez, que corresponde a la expansión de Karhunen-Loève y  $P$  para la expansión del vector de los desplazamientos. El siguiente es el residuo resultante del truncamiento.

$$\varepsilon_{M,P} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{P-1} K_i U_j \xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) - F \quad (3.71)$$

La mejor aproximación a la solución exacta  $U(\theta)$  en el espacio  $\mathcal{H}_P$  expandida mediante  $\{\Psi_k\}_{k=0}^{P-1}$  se obtiene al minimizar este residuo en el sentido cuadrado medio. En el espacio de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$  esto equivale a que este residuo sea ortogonal a  $\mathcal{H}_P$ , esto es

$$E[\varepsilon_{M,P} \cdot \Psi_k] = 0 \quad k = 0, \dots, P-1 \quad (3.72)$$

Introduciendo la siguiente notación,

$$c_{ijk} = E[\xi_i \Psi_j \Psi_k] \quad (3.73)$$

$$F_k = E[\Psi_k F] \quad (3.74)$$

En este caso  $F_k$  es cero para  $k > 0$  debido a que se está considerando carga determinista. Utilizando 3.71, la ecuación 3.72 puede escribirse como

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{P-1} c_{ijk} K_i U_j = F_k \quad (3.75)$$

definiendo

$$K_{jk} = \sum_{i=0}^M c_{ijk} K_i \quad (3.76)$$

la ecuación 3.75 se puede escribir

$$\sum_{j=0}^{P-1} K_{jk} U_j = F_k \quad k = 0, \dots, P-1 \quad (3.77)$$

$$\begin{bmatrix} K_{00} & \cdots & K_{0P-1} \\ K_{10} & \cdots & K_{1P-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{P-10} & \cdots & K_{P-1P-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{P-1} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

### 3.3.12. Análisis del SSFEM

El núcleo del programa de elementos finitos estocásticos consiste en el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales, el ensamblaje de las contribuciones de los elementos y la solución del sistema de ecuaciones lineales obtenido.

#### Matriz de rigidez estocástica del elemento

En el caso de problemas elásticos en dos dimensiones en los cuales se considera la variabilidad del módulo de elasticidad, la matriz de rigidez del elemento está dada por

$$k^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H(x, \theta) B^T D_0 B d\Omega_e \quad (3.79)$$

donde  $H(x, \theta)$  es el campo aleatorio que representa el módulo de Young del material y  $D_0$  es la matriz de elasticidad calculada con un módulo de Young unitario. Al sustituir la expansión en series, truncada de la ecuación 3.24 en 3.79 se pueden obtener las matrices deterministas siguientes:

Matriz de rigidez media:

$$\bar{k}^e = \int_{\Omega_e} \mu B^T D_0 B d\Omega_e \quad (3.80)$$

y las  $M$  matrices de rigidez ponderadas

$$k_i^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H_i(x) B^T D_0 B d\Omega_e \quad i = 1, \dots, M \quad (3.81)$$

Las integrales que aparecen en las ecuaciones 3.80 y 3.81 pueden ser resueltas utilizando un esquema de integración Gaussiano de  $2 \times 2$  para elementos isoparamétricos de 4 nodos (Stefanou G. Papadrakakis M. [40]).

Las fuerzas nodales equivalentes resultantes de los esfuerzos iniciales y de las fuerzas de peso propio  $b$  son calculadas de la siguiente manera,

$$f^e = \int_{\Omega_e} B^T \sigma_0 d\Omega_e + \int_{\Omega_e} N^T b d\Omega_e \quad (3.82)$$

donde  $N$  representa la matriz de funciones de forma y  $B$  la matriz cinemática.

### Procedimiento de ensamblaje

Una técnica estándar para ensamblar las matrices de rigidez puede ser usada para obtener la matriz de rigidez media y ponderada del sistema, esto es

$$\bar{K} = \bigcup_e \bar{k}^e = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mu B^T D_0 B d\Omega_e \quad (3.83)$$

$$K = \bigcup_e k_i^e = \bigcup_e \int_{\Omega_e} H(x, \theta) B^T D_0 B d\Omega_e \quad (3.84)$$

Este paso se denomina ensamblaje de primer nivel.

Al aplicar la técnica de Galerkin al SSFEM se llega al siguiente sistema de ecuaciones haciendo uso de las ecuaciones anteriores.

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{P-1} c_{ijk} K_i U_j = F_k \quad k = 0, \dots, P-1 \quad (3.85)$$



en la expresión anterior los términos correspondientes a  $i = 0$  son las cantidades medias, es decir,  $K_0 = \bar{K}$  y  $U_0 = \bar{U}$ . En el caso de carga determinista, los vectores  $F_k$  son todos cero exceptuando  $F_0$ , la siguiente notación es introducida

$$K_{jk} = \sum_{i=0}^M c_{ijk} K_i = c_{0jk} \bar{K} + \sum_{i=1}^M c_{ijk} K_i \quad j, k = 0, \dots, P-1 \quad (3.86)$$

Para llegar finalmente a una expresión en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} K_{00} & \cdots & K_{0P-1} \\ K_{10} & \cdots & K_{1P-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{P-10} & \cdots & K_{P-1P-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

La cual puede ser reescrita formalmente como

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (3.88)$$

El número de variables desconocidas del sistema 3.88 es  $N \times P$ , donde  $N$  es el número de grados de libertad del sistema y  $P$  es el tamaño de las bases de caos polinomial.

### 3.3.13. Aplicación de las condiciones de borde

Las condiciones de borde se asumen deterministas y dados en términos de un conjunto fijo de grados de libertad  $\mathcal{I}$  para los cuales el desplazamiento es cero (Stefanou G. Papadrakakis M. [34]), esto es,

$$u_j^k = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}, \forall j = 0, \dots, P-1 \quad (3.89)$$

donde  $u_j^k$  es el  $k$ -ésimo componente de  $U_i$  en 3.89.

### 3.3.14. Post-proceso: Análisis de esfuerzos y deformaciones

La salida del análisis del SSFEM es un conjunto de coeficientes de los desplazamientos nodales  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{P-1}\}$  la cual permite representar el vector aleatorio de desplazamientos nodales.

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} U_j \Psi_j \left( \{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M \right) \quad (3.90)$$

Para cualquier elemento  $\Omega_e$  el vector de desplazamientos nodal es el siguiente:

$$u^e(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} u_j^e \Psi_j \left( \{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M \right) \quad (3.91)$$

En un punto  $x$ , las componentes de deformación y esfuerzo son variables aleatorias obtenidas como:

$$\varepsilon(x, \theta) = B(x) \sum_{j=0}^{P-1} u_j^e \Psi_j \left( \{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M \right) \quad (3.92)$$

$$\sigma(x, \theta) = \left[ \mu + \sum_{i=1}^M \xi_i(\theta) \right] D_0 B(x) \sum_{j=0}^{P-1} u_j^e \Psi_j \left( \{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M \right) \quad (3.93)$$

## Capítulo 4

# CONTROL ESTRUCTURAL

### 4.1. INTRODUCCIÓN.

El movimiento de las estructuras cuyos parámetros son distribuidos se describe no solo por variables que dependen del tiempo sino también sobre el espacio. Como resultado, el movimiento de las estructuras flexibles está gobernado por ecuaciones diferenciales que deben ser satisfechas tanto en el dominio geométrico que define la estructura como en las condiciones de borde que definen este dominio. En esencia, las estructuras de parámetros distribuidos son sistemas de dimensión infinita y por lo tanto este tipo de sistemas presenta problemas que no existen en los sistemas de parámetros concentrados. Buena parte de la teoría de control ha sido desarrollada para sistemas con parámetros concentrados y muchos conceptos no son aplicables a los sistemas distribuidos (Sweversa J, Lauwerys C, Vandersmissen B, Maes M, Reybrouck K, Sas P [?]). El uso del control modal permite realizar el control en los modos de vibración de la estructura de tal manera que los conceptos de los sistemas concentrados son aplicables (Liu W. [56]).

Una estructura flexible es un sistema lineal que tiene las siguientes características:

- Dimensión finita.
- Controlable y observable.
- Sus polos tienen parte real pequeña y no se cruzan.

Las estructuras flexibles poseen características específicas, una de ellas es la frecuencia de resonancia (Zhu X, Law S. [63]). En una estructura flexible existen varias frecuencias de resonancia. Cuando una estructura se mueve a estas frecuencias su movimiento es armónico o sinusoidal. Este patrón se llama modo de vibración. Debido a que los modos son independientes, ellos pueden ser excitados en forma separada. Otra característica de las estructuras es que los polos del sistema son complejos conjugados. Su parte real, que representan el amortiguamiento, tienen típicamente valores pequeños.

## 4.2. DESCRIPCIÓN EN LA FORMA DE ESPACIO DE ESTADOS.

### 4.2.1. Modelo nodal.

Los modelos nodales están dados en términos de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales. Este tipo de modelos es caracterizado por las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, donde tales parámetros se obtienen de la solución por elementos finitos, y además por las matrices de entrada y salida (localización de los actuadores y los sensores) (Gawronski W, Ahlstrom H G, Jr, Bernardo A. [?]).

Así, una estructura flexible en coordenadas nodales es representada mediante la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}_o\mathbf{u} \quad (4.1)$$

En esta ecuación  $\mathbf{q}$  es el vector de desplazamiento nodal  $n_d \times 1$ ;  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidad nodal  $n_d \times 1$ ;  $\ddot{\mathbf{q}}$  es el vector de aceleración nodal  $n_d \times 1$ ;  $\mathbf{u}$  es el vector de entrada,  $s \times 1$ ;  $\mathbf{y}$  es el vector de salida,  $r \times 1$ ;  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $n_d \times n_d$ ;  $\mathbf{D}$  es la matriz de amortiguamiento,  $n_d \times n_d$ ; y  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $n_d \times n_d$ . La matriz de entrada  $\mathbf{B}_o$  es de tamaño  $n_d \times s$ , La matriz de salida de los desplazamientos  $\mathbf{C}_{oq}$ ,  $r \times n_d$  y la matriz de salida de las velocidades  $\mathbf{C}_{ov}$ ,  $r \times n_d$ . Siendo  $n_d$  el número de grados de libertad del sistema,  $r$  el número de salidas o sensores y  $s$  el número de entradas o actuadores.

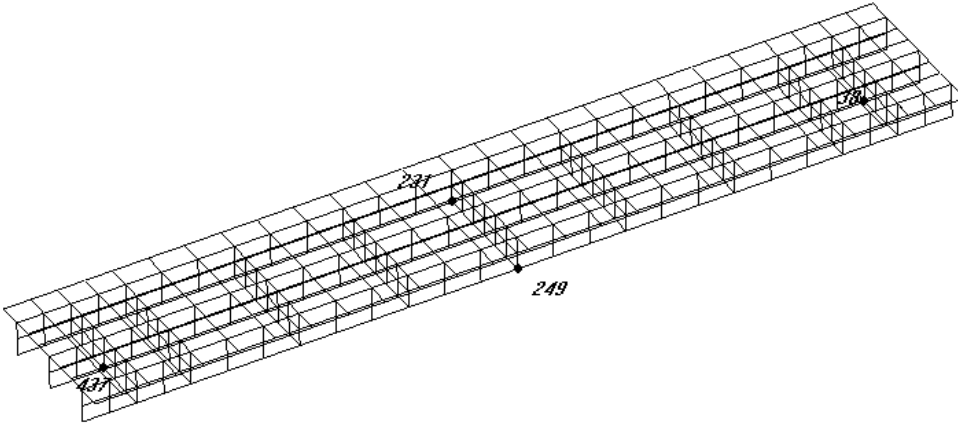


Figura 4.1: Ubicación espacial de los sensores y actuadores. Sensores en los nodos 231 y 249. Actuadores en los nodos 437 y 38.

La matriz de masa siempre es una matriz positiva definida y las matrices de rigidez y amortiguamiento son semidefinidas positivas (Jnifene A. [3]).

#### 4.2.2. Modelo en coordenadas modales.

Los modelos de segundo orden se definen en coordenadas modales, estos se utilizan con frecuencia para el análisis de dinámicas complejas, que se obtienen por medio de elementos finitos, con el fin de reducir el orden de un sistema.

Dado que las coordenadas modales son independientes, los modelos modales poseen propiedades útiles que simplifican el análisis. La representación en coordenadas modales se obtiene de la representación en coordenada nodales, como se explica en lo siguiente (Zhang J, Roschke P. [61]).

Del análisis modal del sistema no amortiguado realizado en la sección 2.2.5, el conjunto de  $n$  valores que satisfacen la ecuación determinante 2.14 son las frecuencias denotadas como  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  donde  $n \leq n_d$  y  $\omega_i$  se denomina la  $i$  – ésima frecuencia natural.

Al sustituir los valores  $\omega_i$  en la ecuación 2.13 se obtiene el conjunto de vectores  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  que satisfacen la ecuación, estos se denominan los modos de vibración. Así, se tienen las siguientes dos matrices:

La matriz de frecuencias naturales:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

y la matriz de modos de vibración de dimensión  $n_d \times n$ , donde  $n$  es el número de modos de la estructura considerados,

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{11} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1n_d} & \phi_{2n_d} & \dots & \phi_{nn_d} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La matriz modal tiene la propiedad de diagonalizar las matrices de masa y de rigidez,

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (4.5)$$

Las matrices diagonales obtenidas se denominan matriz de masa modal y matriz de rigidez modal. Aplicando la misma transformación a la matriz de amortiguamiento de la ecuación 2.27, se obtiene:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \quad (4.6)$$

Para obtener el modelo modal se introduce una nueva variable,  $\mathbf{q}_m$ , que se denomina desplazamiento modal y se define como sigue:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{q}_m \quad (4.7)$$

La ecuación del movimiento en esta nueva variable es:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}_m + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}_m + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}_m = \Phi^T \mathbf{B}_o \mathbf{u} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{oq} \Phi \mathbf{q}_m + \mathbf{C}_{ov} \Phi \dot{\mathbf{q}}_m \quad (4.9)$$

Haciendo uso de las ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6 y premultiplicando luego por  $\mathbf{M}_m^{-1}$  se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + 2\mathbf{Z}\Omega\dot{\mathbf{q}}_m + \Omega^2\mathbf{q}_m = \mathbf{B}_m\mathbf{u} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{mq}\mathbf{q}_m + \mathbf{C}_{mv}\dot{\mathbf{q}}_m \quad (4.11)$$

La matriz  $\mathbf{Z}$  se obtiene de la siguiente relación  $\mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{D}_m = 2\mathbf{Z}\Omega$ , así que  $\mathbf{Z}$  es:

$$\mathbf{Z} = 0,5\mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{D}_m\Omega^{-1} \quad (4.12)$$

mientras que las matrices de entrada y salida son:

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{M}_m^{-1}\Phi^T\mathbf{B}_o \quad (4.13)$$

$$\mathbf{C}_{mq} = \mathbf{C}_{oq}\Phi \quad (4.14)$$

$$\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov}\Phi \quad (4.15)$$

Las ecuaciones 4.10 y 4.11 son un conjunto de ecuaciones desacopladas. Por lo tanto, este conjunto de ecuaciones puede se escrito de la siguiente manera:

$$\ddot{q}_{mi} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_{mi} + \omega_i^2q_{mi} = b_{mi}u \quad (4.16)$$

$$y_i = c_{mqi}q_{mi} + c_{mvi}\dot{q}_{mi} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.18)$$

donde  $b_{mi}$  es la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{B}_m$  y  $c_{mqi}$  y  $c_{mvi}$  son la  $i$ -ésimas columnas de  $\mathbf{C}_{mq}$  y  $\mathbf{C}_{mv}$  respectivamente. El coeficiente  $\zeta_i$  es el amortiguamiento modal de modo  $i$ -ésimo.

### 4.2.3. Función de transferencia en coordenadas modales.

La función de transferencia de la estructura es la suma de las funciones de transferencia modales.

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^n G_{mi}(\omega) \quad (4.19)$$

es decir,

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{(c_{mqi} + j\omega c_{mvi}) b_{mi}}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \omega} \quad (4.20)$$

### 4.2.4. Polos de la estructura.

Los polos de la estructura son los ceros de la ecuación característica. Para el  $i$  –ésimo modo, la ecuación característica es:

$$s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2 = 0 \quad (4.21)$$

Para amortiguamientos pequeños los polos son complejos conjugados y tienen la siguiente forma

$$s_1 = -\zeta_i \omega_i + j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (4.22)$$

$$s_2 = -\zeta_i \omega_i - j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (4.23)$$

## 4.3. MODELO ESTRUCTURAL EN ESPACIO DE ESTADOS.

Para propósitos de simulación de la dinámica estructural, el análisis y el diseño de sistemas de control es conveniente representar las ecuaciones de la estructura flexible en forma de espacio de estados.

### 4.3.1. Modelos nodales.

Para conseguir la representación en estados a partir del modelo nodal 4.1, la ecuación se reescribe como sigue:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_o \mathbf{u} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_q \mathbf{q} + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (4.25)$$

Definiendo el vector de estados  $\mathbf{x}$  como una combinación de los desplazamientos estructurales,  $\mathbf{q}$ , y las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ , se tiene:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

En este caso las ecuaciones 4.24 y 4.25 se reescriben como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o\mathbf{u} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{oq}\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_{ov}\mathbf{x}_2 \quad (4.29)$$

Combinando las anteriores ecuaciones, se obtiene las ecuaciones de estado siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.31)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B_o \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_o \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{oq} & C_{ov} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

donde  $\mathbf{A}$  es de tamaño  $N \times N$ ,  $\mathbf{B}$  es  $N \times s$ , y  $\mathbf{C}$  es de tamaño  $r \times N$ . La dimensión del modelo de estados es dos veces el número de grados de libertad  $n_d$ , es decir,  $N = 2n_d$ .

#### 4.3.2. Modelos en coordenadas modales.

Debido a que frecuentemente las representaciones en coordenadas nodales son inaceptablemente altas (generalmente el número de grados de libertad es mayor a 1000), esta representación es poco usada en dinámica estructural. Por tal motivo se presenta a continuación la representación en coordenadas modales en la cual el número de ecuaciones es mucho más bajo (Gibson J. S, Mingori D. L. [25]).

En la primera de estas representaciones se define el vector de estados siguiente:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega q_m \\ \dot{q}_m \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$



En este caso la ecuación 4.10 se puede presentar como el siguiente conjunto de ecuaciones de primer orden,

$$\dot{x}_1 = \Omega x_2 \quad (4.36)$$

$$\dot{x}_2 = -\Omega x_1 - 2Z\Omega x_2 + B_m u \quad (4.37)$$

$$y = C_{mq}\Omega^{-1}x_1 + C_{mv}x_2 \quad (4.38)$$

Estas ecuaciones conducen a la forma de espacio de estados mediante las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -2Z\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [C_{mq}\Omega^{-1} \quad C_{mv}] \quad (4.39)$$

Aplicando la siguiente transformación,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Z & I \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

la representación de los estados en 4.35 se convierten en

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega q_m \\ Z\Omega q_m + \dot{q}_m \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

con la correspondiente representación de  $(A, B, C)$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -Z\Omega & \Omega \\ -\Omega - Z^2\Omega & -Z\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [C_{mq}\Omega^{-1} - C_{mv}Z \quad C_{mv}] \quad (4.42)$$

Las anteriores representaciones modales se pueden caracterizar mediante la tripleta  $A_m, B_m, C_m$ , donde  $A_m$  tiene la siguiente forma diagonal.

$$A_m = \text{diag}(A_{mi}) = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & x \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

y las matrices de entrada y de salida son divididas correspondientemente de la siguiente manera,

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} B_{m1} \\ B_{m2} \\ \vdots \\ B_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}_m = [ C_{m1} \ C_{m2} \ \cdots \ C_{mn} ] \quad (4.45)$$

La  $i$  - *ésima* componente o modo tiene la representación de estados  $(A_{mi}, B_{mi}, C_{mi})$ ,

$$\dot{x}_i = A_{mi}x_i + B_{mi}u \quad (4.46)$$

$$y_i = C_{mi}x_i \quad (4.47)$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.48)$$

Para cada una de las anteriores representaciones, las matrices  $A_{mi}$ ,  $B_{mi}$  y  $C_{mi}$  son,

La representación 4.39, (representación modal 1):

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{mi} \end{bmatrix}, \quad C_{mi} = [ \frac{c_{mqi}}{\omega_i} \quad c_{mvi} ] \quad (4.49)$$

y para la representación 4.42 (representación modal 2)

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{mi} \end{bmatrix}, \quad C_{mi} = [ \frac{c_{mqi}}{\omega_i} - c_{mvi}\zeta_i \quad c_{mvi} ] \quad (4.50)$$

y los correspondiente vectores de estados:

$$x_i = \begin{Bmatrix} \omega_i q_{mi} \\ q_{mi} \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

$$x_i = \begin{Bmatrix} \omega_i q_{mi} \\ \zeta_i \omega_i q_{mi} + \dot{q}_{mi} \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

#### 4.4. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD.

Esta sección parte con la definición de los conceptos de observabilidad y controlabilidad en el caso de análisis de estructuras, como sigue: Una estructura es controlable si los actuadores instalados excitan todos sus modos y es observable si todos los sensores instalados detectan los movimientos de todos los modos. Esta definición responde la pregunta de la detección y excitación de modos en términos de si y no. Por otro lado los Grammianos responden a la misma cuestión en términos mas cualitativos, representando estos el grado de controlabilidad y observabilidad de cada modo (Gawronski W. [55]).

La propiedad fundamental de las estructuras flexibles en coordenadas modales es que su representación puede hacerse a través de un conjunto desacoplado de modos (Ho C, Ma C. [27]). Esto permite tratar las propiedades de cada uno de los modos de manera separada y combinarlos

para obtener propiedades de la estructura completa.

Los Grammianos son matrices no negativas que expresan las propiedades de controlabilidad y observabilidad cualitativamente y están libres de dificultades numéricas.

Los grammianos de controlabilidad y observabilidad se definen como sigue:

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (4.53)$$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad (4.54)$$

Una forma más conveniente de determinarlos es mediante las siguientes ecuaciones diferencial.

$$\dot{W}_c = A W_c + W_c A^T + B B^T \quad (4.55)$$

$$\dot{W}_o = A^T W_o + W_o A + C^T C \quad (4.56)$$

La solución  $W_c(t)$  y  $W_o(t)$  son matrices variantes en el tiempo pero el interés recae en la solución en estado estacionario. Para un sistema estable, la solución del estado estacionario se obtiene al asumir que  $\dot{W}_o = \dot{W}_c = 0$ . En este caso la ecuación diferencial se reemplaza por las siguientes ecuaciones algebraicas, denominadas ecuaciones de Lyapunov:

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (4.57)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (4.58)$$

Para  $A$  estable, los grammianos  $W_c(t)$  y  $W_o(t)$  obtenidos son definidos positivos.

Los grammianos dependen del sistema (King B, Hovakimyan N, Evans K, Buhl M. [33]) de coordenadas y para una transformación lineal de un estado  $x$  en un estado nuevo  $x_n$ , tal que  $x = R x_n$  los grammianos se transforman como sigue:

$$W_{cn} = R^{-1} W_c R^{-T} \quad (4.59)$$

$$W_{on} = R^T W_o R \quad (4.60)$$

Los valores propios de los grammianos cambian durante la transformación de coordenadas, sin embargo, los valores propios del producto de los grammianos es invariante. Así que,

$$\lambda_i(W_{cn} W_{on}) = \lambda_i(R^{-1} W_c R^{-T} R^T W_o R) = \lambda_i(W_c W_o) \quad (4.61)$$

Estos invariantes se denotan como  $\gamma_i$ ,

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i(W_{cn} W_{on})} \quad i = 1, \dots, N \quad (4.62)$$

y son denominados los valores singulares hankel del sistema.

#### 4.4.1. Controladores de baja autoridad.

Para entrar a diseñar el controlador es importante primero distinguir entre controladores de baja autoridad y controladores de alta autoridad. Esta distinción permite diseñar controladores que suprimen significativamente las vibraciones flexibles de la estructura (Eso es hecho por el controlador de baja autoridad), o seguir un comando de manera precisa (En este caso se utilizaría un controlador de alta autoridad) (Gawronski W. [55], Petersen I. R., Pota H. R.[44]).

Las fuerzas de control que actúan sobre la estructura pueden ser divididas en fuerzas de rastreo y fuerzas de amortiguamiento. Las fuerzas de rastreo mueven la estructura de tal forma que siga un objetivo, mientras las fuerzas de amortiguamiento actúan sobre la estructura para suprimir las vibraciones. En general, las fuerzas de rastreo son significativamente más grandes que las fuerzas de amortiguamiento. Por tal razón los controladores estructurales pueden dividirse en controladores de baja y de alta autoridad.

El controlador de baja autoridad es el que usa una entrada limitada para controlar la vibración del sistema. En el caso de las estructuras flexibles la entrada limitada introduce el amortiguamiento adicional al sistema de tal manera que tal fuerza no tenga una influencia considerable en el comportamiento global de la estructura.

De lo anterior, el control de las estructuras flexibles puede ser dividido en dos estados, el primero es cuando se adiciona amortiguamiento a la estructura y la vibración se suprime mostrando un decaimiento rápido, el segundo es cuando el movimiento global de la estructura es afectado y el amortiguamiento varía muy poco.

En el dominio de la frecuencia el primer estado se caracteriza por la supresión de los picos de resonancia, mientras las regiones fuera de estos se afectan muy poco. En el caso del diagrama de polos y ceros para un controlador de baja autoridad, las ganancias mueven los polos de la estructura en el sentido horizontal, es decir, la parte real de los polos cambia significativamente.

### 4.5. CONTROLADORES LQG.

En el diseño de los controladores LQG existen dos aspectos importantes. El primero es la determinación de los pesos del índice de desempeño. Los pesos impactan principalmente el desempeño del sistema en lazo cerrado, en términos de las propiedades de exactitud del rastreo y el rechazo de perturbaciones. El segundo aspecto es la reducción del orden del controlador, el cual impacta la implementación en términos de la complejidad y exactitud del software del controlador.

#### 4.5.1. Definición de las ganancias.

El diagrama de bloques para el sistema de control LQG puede ser representado como el de la figura 4.3. El cual consiste de una planta o estructura ( $G$ ) y un controlador ( $K$ ). La salida de la planta  $y$  se mide para luego alimentar al controlador.  $y$  es utilizada por el controlador para determinar la señal de control que conduce la planta.

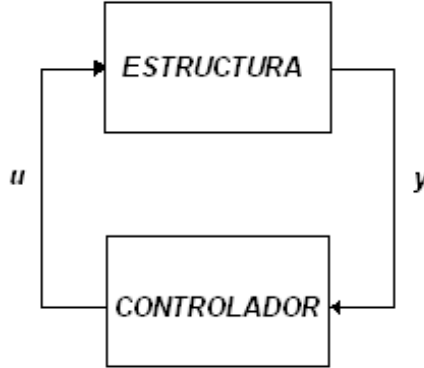


Figura 4.2: Estructura interna del sistema LQG.

La planta se describe por la ecuación en espacio de estados siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu + v \quad (4.63)$$

$$y = Cx + w \quad (4.64)$$

donde  $x$  es el vector de estados de la planta,  $v$  es la perturbación que afecta a la planta, se denomina ruido del proceso y tiene covarianza  $V = E(vv^T)$ ,  $w$  es un ruido que afecta la salida, comúnmente se le conoce como ruido de la medida y su covarianza es  $W = E(ww^T)$ . Ambos ruidos son no correlacionado, esto es,  $E(vw^T) = 0$ . Se puede asumir sin pérdida de generalidad que la covarianza del ruido medido es unitario, esto es  $W = I$ .

La forma interna de la estructura y del controlador se encuentra en las figuras 4.2 y 4.3.

El controlador produce la señal de control  $u$  que dirige la planta. Esta señal es proporcional al valor estimado del estado  $\hat{x}$ , y la ganancia entre el estado y la señal de control  $u$  es la ganancia del controlador. En estos casos se utiliza el estimado del estado  $\hat{x}$  más que el estado  $x$ , dado que típicamente los estados no están disponibles.

El estado estimado se obtiene a partir del estimador, el cual hace parte del controlador. La ecuación del estimador es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \quad (4.65)$$

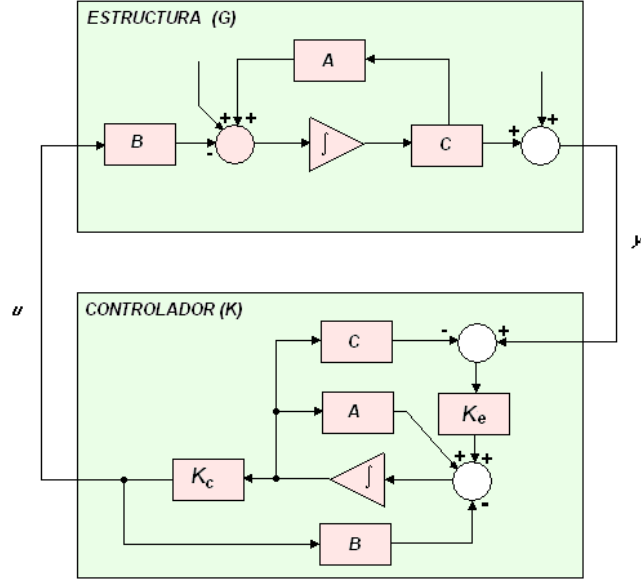


Figura 4.3: Estructura interna del sistema LQG.

Si se asume que el modelo de la planta es conocido en forma exacta, se puede afirmar que el estado estimado resulta ser una copia exacta del estado actual, excepto por la dinámica inicial. La siguiente tarea en el diseño es entonces determinar la ganancia del estimador  $K_e$ .

La ecuación de estado desde la entrada hasta la salida del controlador se puede determinar con ayuda del diagrama de bloques, de lo cual resulta la siguiente ecuación:

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK_c - K_e C) \hat{x} + K_e y \quad (4.66)$$

$$u = -K_c \hat{x} \quad (4.67)$$

La anterior ecuación se puede llevar a una forma más compacta renombrando la representación de la manera siguiente,

$$A_{lqg} = A - BK_c - K_e C \quad (4.68)$$

$$B_{lqg} = K_e \quad (4.69)$$

$$C_{lqg} = -K_c \quad (4.70)$$

En las ecuaciones anteriores las ganancias del controlador  $K_c$  y del estimador  $K_e$  son cantidades desconocidas. Estas ganancias se pueden determinar al minimizar el índice de desempeño

siguiente,

$$J^2 = E \left( \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \right) \quad (4.71)$$

En esta ecuación  $R$  es la matriz positiva de los pesos de la entrada y  $Q$  es una matriz positiva semidefinida de pesos del estado. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $R = I$ .

El mínimo de la función  $J$  se obtiene para la realimentación definida como sigue,

$$u = -K_c \hat{x} \quad (4.72)$$

siendo la matriz de ganancia:

$$K_c = B^T S_c \quad (4.73)$$

donde  $S_c$  es la solución de la ecuación algebraica de Riccati para el controlador (CARE),

$$A^T S_c + S_c A - S_c B B^T S_c + Q = 0 \quad (4.74)$$

y la ganancia del estimador óptima está dada por,

$$K_e = S_e C^T \quad (4.75)$$

donde  $S_e$  es la solución de la ecuación algebraica de Riccati para el estimador (FARE)

$$A^T S_e + S_e A - S_e C^T C S_e + V = 0 \quad (4.76)$$

### Sistema en lazo cerrado.

Las ecuaciones de estado en lazo abierto son las ecuaciones 4.63 y 4.64 y para el controlador LQG son las ecuaciones 4.66 y 4.67. Para determinar las ecuaciones de espacio de estado en lazo cerrado, se define la siguiente variable de estado,

$$x_o = \begin{Bmatrix} x \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

donde es  $\varepsilon = x - \hat{x}$ , de esta manera se puede llegar a las ecuaciones en espacio de estados de lazo cerrado siguientes,

$$\dot{x}_o = A_o x_o + B_o v \quad (4.78)$$

$$z = C_o x_o \quad (4.79)$$

donde,

$$A_o = \begin{bmatrix} A - B K_c & B K_c \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$B_o = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$C_o = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

### Controlador LQG balanceado.

Las soluciones del CARE y el FARE depende de la escogencia de los estados. Dentro de todos la posibles escogencias existe una representación tal que las soluciones de CARE y el FARE son iguales y diagonales. Asumiendo que el sistema es controlable y observable, se tendría que,

$$S_c = S_e = M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \quad (4.83)$$

donde  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N \geq 0$  y  $M$  es una matriz positiva definida diagonal, esto es,  $M = \text{diag}(\mu_i) \quad i = 1, \dots, N$ . La representación que satisface la condición 4.83 se denomina representación balanceada y  $\mu_i \quad i = 1, \dots, N$  son los valores singulares LQG.

Sea  $R$  la transformación del estado  $x$  tal que  $x = R\bar{x}$ . Entonces las soluciones del FARE y el CARE en las nuevas coordenadas son:

$$\bar{S}_c = R^T S_c R \quad (4.84)$$

y las matrices de pesos,

$$\bar{S}_e = R^{-1} Q_c R \quad (4.85)$$

La transformación que conduce a la representación balanceada es como sigue:

Las soluciones  $S_c$  y  $S_e$  del FARE y CARE de la representación en espacio de estados  $(A, B, C)$  dada se descompone como sigue

$$S_c = P_c^T P_c \quad (4.86)$$

$$S_e = P_e P_e^T \quad (4.87)$$

se construye una matriz  $H$ , tal que,

$$H = P_c P_e \quad (4.88)$$

se determinan la descomposición de valor singular

$$H = V M U^T \quad (4.89)$$

y se obtiene finalmente la matriz de transformación

$$R = P_e U M^{-1/2} \quad (4.90)$$



#### 4.5.2. Controlador LQG de baja autoridad.

Sea  $(A, B, C)$  la representación modal de una estructura flexible en lazo abierto (bien sea en la representación modal 1 o 2), y sea  $A_{c1} = A - BB^T S_c$  o  $A_{c2} = A - C^T C S_e$  las matrices en lazo cerrado, donde  $S_c$  y  $S_e$  son las soluciones del CARE y el FARE respectivamente. En el controlador LQG de baja autoridad se cumple la siguiente propiedad para la matrices de lazo cerrado,

$$\text{eig}(A_{c1}) = \text{eig}(A - BB^T S_c) \cong \text{eig}(A - \text{diag}(BB^T) S_c) \quad (4.91)$$

y

$$\text{eig}(A_{c2}) = \text{eig}(A - S_e C^T C) \cong \text{eig}(A - S_e \text{diag}(C^T C)) \quad (4.92)$$

Esto quiere decir que para los controladores LQG de baja autoridad,  $BB^T$  y  $C^T C$  pueden ser reemplazados por sus términos diagonales.

En los controladores LQG de baja autoridad se cumple la siguiente propiedad,

#### 4.5.3. Propiedad 1. Relación entre A, B, C para el controlador LQG de baja autoridad.

Sea  $\|S_c\|_2 \leq s_o$  y  $\|S_e\|_2 \leq s_o$ . Para un sistema flexible, observable y controlable existe un  $S_o > 0$  tal que el controlador es de baja autoridad. Por lo tanto si  $A$  está en la forma modal, se puede reemplazar  $BB^T$  por,

$$BB^T \cong -W_c (A + A^T) = \text{diag}(0, 2w_{c1}\alpha_1, 0, 2w_{c2}\alpha_2, \dots, 0, 2w_{cn}\alpha_n) \quad (4.93)$$

y  $C^T C$  por

$$C^T C \cong -W_o (A + A^T) = \text{diag}(0, 2w_{o1}\alpha_1, 0, 2w_{o2}\alpha_2, \dots, 0, 2w_{on}\alpha_n) \quad (4.94)$$

y en el caso del  $i$  -ésimo bloque

$$B_i B_i^T \cong -w_{ci} (A_i + A_i^T) = w_{ci} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_i \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$C_i^T C_i \cong -w_{oi} (A_i + A_i^T) = w_{oi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_i \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

donde  $\alpha_i = 2\zeta_i \omega_i$

#### 4.5.4. Propiedad 2. Solución aproximada del CARE.

Asumiendo una matriz de peso diagonal  $Q = \text{diag}(q_i I_2)$ ,  $i = 1, \dots, n$  entonces existe un  $q_i \leq q_{oi}$  donde  $q_{oi} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que

$$S_c \cong \text{diag}(s_{ci} I_2) \quad (4.97)$$

es la solución de 4.74 y

$$s_{ci} \cong \frac{\beta_{ci} - 1}{2w_{ci}} \quad (4.98)$$

$$\beta_{ci} = \sqrt{1 + \frac{2q_i w_{ci}}{\zeta_i \omega_i}} \quad (4.99)$$

#### 4.5.5. Propiedad 3. Solución aproximada del FARE.

Asumiendo una matriz  $V$  diagonal  $V = \text{diag}(v_i I_2)$ ,  $i = 1, \dots, n$  entonces existe un  $v_i \leq q_{oi}$  donde  $v_{oi} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que

$$S_e \cong \text{diag}(s_{ei} I_2) \quad (4.100)$$

es la solución de la ecuación 4.76

$$s_{ei} \cong \frac{\beta_{ei} - 1}{2w_{ei}} \quad (4.101)$$

$$\beta_{ei} = \sqrt{1 + \frac{2v_i w_{oi}}{\zeta_i \omega_i}} \quad (4.102)$$

De las ecuaciones 4.97 a 4.102 se pueden determinar los valores singulares LQG como la media geométrica de  $s_{ci}$  y  $s_{ei}$ , o  $\mu_i = \sqrt{s_{ci}s_{ei}}$ , esto es

$$\mu_i \cong \frac{\sqrt{(\beta_{ci} - 1)(\beta_{ei} - 1)}}{2\gamma_i} \quad 1, \dots, n \quad (4.103)$$

#### 4.5.6. Diagrama de polos y ceros.

La solución diagonalmente dominante del CARE y el FARE permiten establecer la relación entre los pesos y la localización de los polos, lo cual es una herramienta útil en el diseño del controlador.

#### 4.5.7. Propiedad 4. Polos y ceros del LQG.

Sea la matriz de pesos  $Q$

$$Q = \text{diag}(0, 0, \dots, q_i, \dots, 0, 0) \quad (4.104)$$

para el controlador de baja autoridad  $q_i \leq q_{oi}$ , en este caso cada par de polos del lazo cerrado  $(\lambda_{cri} \pm j\lambda_{cii})$  se relaciona con los polos del lazo abierto  $(\lambda_{ori} \pm j\lambda_{oii})$  de la siguiente forma,

$$(\lambda_{cri} \pm j\lambda_{cii}) \cong (\beta_{ci}\lambda_{ori} \pm j\lambda_{oii}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.105)$$

de lo anterior, se ve que las partes reales de los polos está relacionada por el factor  $\beta_{ci}$

$$\lambda_{cri} \cong \beta_{ci}\lambda_{ori} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.106)$$

mientras las partes imaginarias del sistema en lazo cerrado permanece casi incambiables,

$$\lambda_{cii} \cong \lambda_{oii} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.107)$$

donde  $\beta_{ci}$  se definió en la ecuación 4.99.

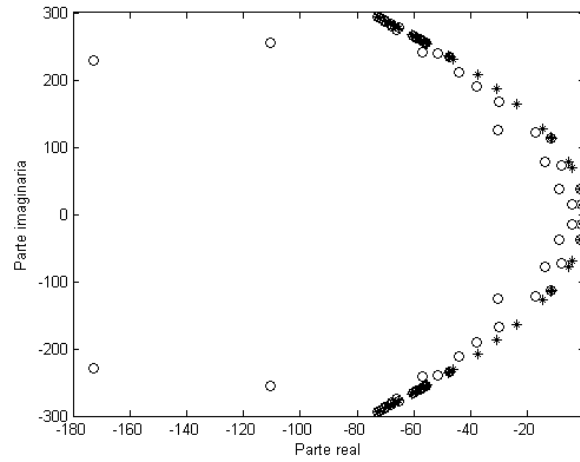


Figura 4.4: Diagrama de los polos del sistema estructural en lazo abierto (\*) y en lazo cerrado (o)

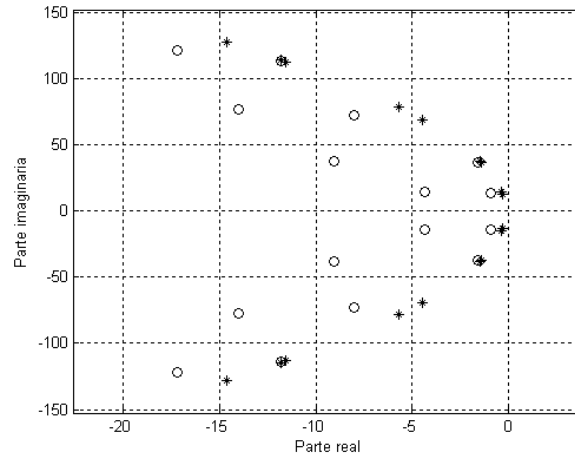


Figura 4.5: Detalle del diagrama de los polos del sistema estructural en lazo abierto (\*) y en lazo cerrado (o)

**4.5.8. Propiedad 5. Polos y ceros para el estimador.**

Sea

$$V = \text{diag}(0, 0, \dots, v_i I_2, \dots, 0, 0) \quad (4.108)$$

para valores moderados de los pesos ( $v_i \leq v_{oi}$ ), el par de polos del estimador se relacionan con los polos del lazo abierto ( $\lambda_{ori} \pm j\lambda_{oii}$ ) como sigue:

$$(\lambda_{eri} \pm j\lambda_{eii}) \cong (\beta_{ei}\lambda_{ori} \pm j\lambda_{oii}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.109)$$

la parte real de los polos cambia un factor  $\beta_{ei}$

$$\lambda_{eri} \cong \beta_{ei}\lambda_{ori} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.110)$$

mientras la parte imaginaria permanece casi sin cambio.

$$\lambda_{eii} \cong \lambda_{oii} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.111)$$

donde  $\beta_{ei}$  se definió en la ecuación 4.102.

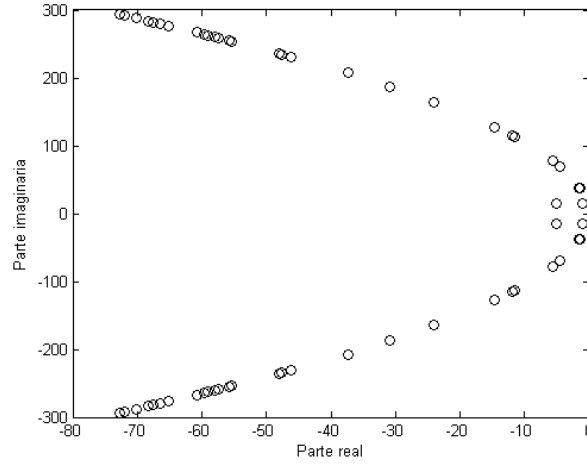


Figura 4.6: Diagrama de los polos del estimador.

**4.6. APLICACIÓN DE LA LEY DE CONTROL.**

La gráfica 4.5 muestra el cambio de la posición de los polos cuando al sistema en lazo abierto se adiciona el controlador y se convierte en un sistema en lazo cerrado. Se puede apreciar que los polos se trasladan hacia la izquierda lo que demuestra un aumento en el amortiguamiento. Este aumento en el amortiguamiento también se evidencia en la gráfica 4.7 que muestra la disminución de la norma  $H_\infty$  de la matriz de transferencia en los picos de resonancia.

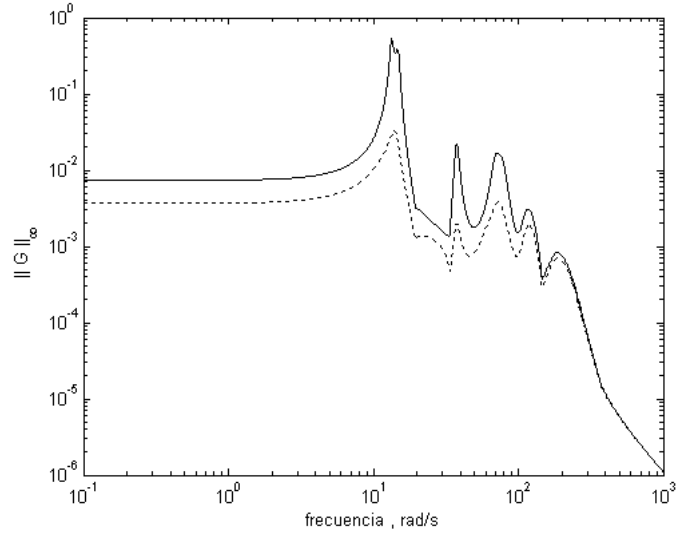


Figura 4.7: Norma infinita de la matriz de transferencia en lazo abierto (—) y en lazo cerrado (---).

La gráfica 4.8 muestra la fuerza que debe ser aplicada a la estructura en los nodos 437 y 38 como se indica en la figura 4.1 con el fin de suprimir en gran medida la vibración en los desplazamientos del puente. Por otra parte las figuras 4.9 y 4.10 muestran los desplazamientos verticales en los nodos 231 y 249 sin y con la aplicación de la ley de control respectivamente.

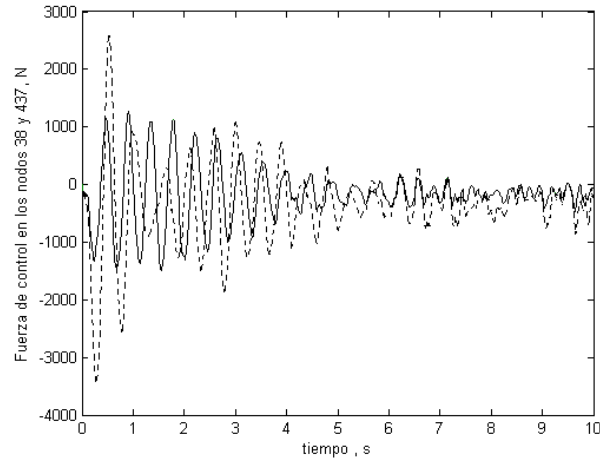


Figura 4.8: Fuerzas de control en los nodos 437 y 38.

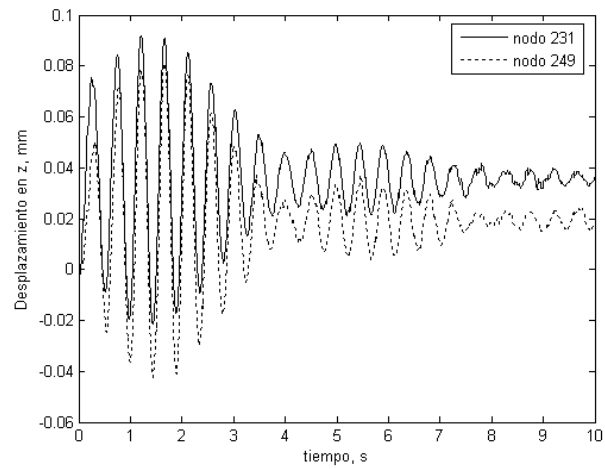


Figura 4.9: Desplazamientos medidos en los nodos 231 y 249 sin la aplicación de la ley de control.

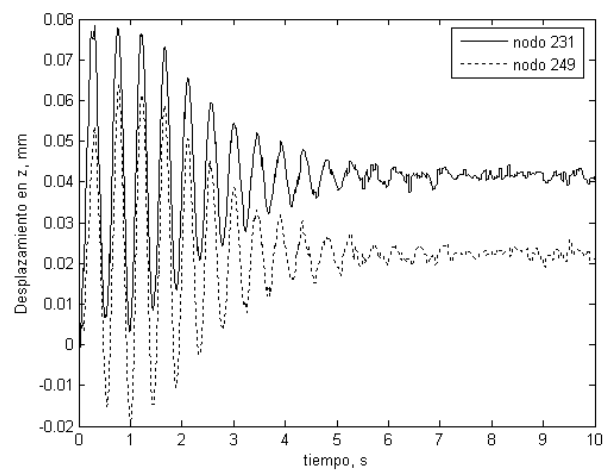


Figura 4.10: Desplazamientos medidos en los nodos 231 y 249 aplicando la ley de control.

## Capítulo 5

# APLICACIÓN DEL SSFEM CON Y SIN FUERZA DE CONTROL.

### 5.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos al aplicar el método de elementos finitos estocásticos al sistema estructural del puente de la figura 2.1 y cuyas propiedades se encuentran especificadas en la tabla 2.1. Los parámetros del campo aleatorio son presentados en la tabla 5.1, donde las propiedades mecánicas fueron tomadas de la referencia Barker R y Puckett J. [11].

### 5.2. DINÁMICA DEL SISTEMA UTILIZANDO SSFEM.

En el sistema de ecuaciones de la estructura al incluir la formulación de elementos finitos estocástico adquiere la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} M_{oo} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{oo} \\ \ddot{u}_{tt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{oo} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{oo} \\ \dot{u}_{tt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{ot} \\ K_{to} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{oo} \\ u_{tt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{oo} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

donde la matriz de masa, de amortiguamiento y fuerza contiene valores únicamente en los

Tipo de campo	Gaussiano
Coefficiente de variación	0,2
Media del módulo de elasticidad ( $\mu$ )	$2,5e10 \text{ N/m}^2$
Desviación estándar del módulo de elasticidad ( $\sigma$ )	$5e9$
Número de términos de la expansión de Karhunen Loève	3
Orden del caos homogéneo	3
Dimensión del caos polinomial	3
Longitud de correlación del campo aleatorio	$40m$

Tabla 5.1: Parámetros del campo aleatorio.

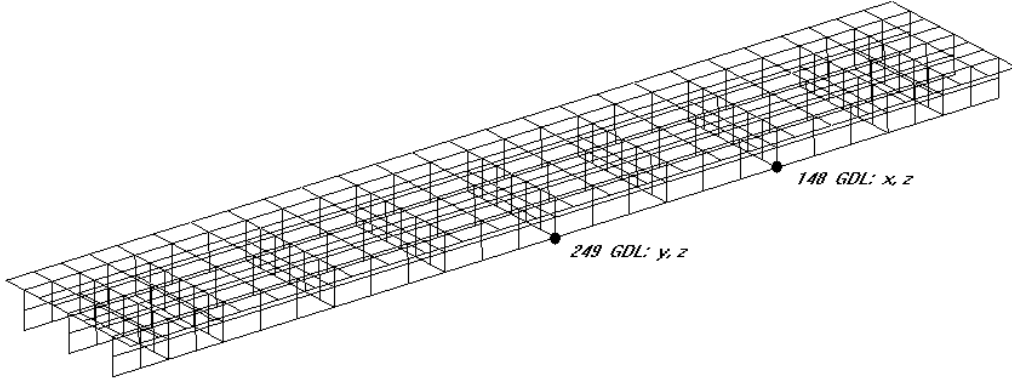


Figura 5.1: Ubicación de los nodos y grados de libertad seleccionados.

términos que corresponden a  $i = 0$ , los cuales son las cantidades medias, como sigue

$$M = \begin{bmatrix} M_{oo} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$C = pM_{oo} + qK_{oo} \quad (5.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{oo} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_o \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mientras la matriz de rigidez es

$$K = \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{o1} & \cdots & 0 \\ K_{1o} & K_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$



### 5.3. CONDENSACIÓN ESTÁTICA.

El método de condensación estática se utiliza para eliminar del análisis dinámico aquellos grados de libertad de la estructura los cuales tienen masa cero asociada. De todas maneras, el método permite tener en cuenta todos los grados de libertad (Chopra [1]).

Los términos donde la matriz de masa contiene ceros en la diagonal pueden ser eliminados del análisis dinámico de la estructura debido a que la excitación dinámica no incluye ninguna fuerza externa sobre estos términos.

La ecuación del movimiento para el sistema se puede escribir en la siguiente forma particionada:

$$M_{oo}\ddot{u}_{oo} + C_{oo}\dot{u}_{oo} + K_{oo}u_{oo} + K_{ot}u_{tt} = F_{oo} \quad (5.7)$$

donde  $u_{tt}$  denota los grados de libertad con masa cero y  $u_{oo}$  los grados de libertad con masa distinta de cero. Las dos ecuaciones particionadas son:

$$K_{to}u_{oo} + K_{tt}u_{tt} = 0 \quad (5.8)$$

$$\hat{K}_{oo} = K_{oo} - K_{to}^T K_{tt}^{-1} K_{to} \quad (5.9)$$

La ecuación 5.9 permite una relación estática entre  $u_{tt}$  y  $u_{oo}$

$$u_{tt} = -K_{tt}^{-1} K_{to}u_{oo} \quad (5.10)$$

sustituyendo la ecuación 5.10 en la ecuación 5.7 resulta,

$$M_{oo}\ddot{u}_{oo} + C_{oo}\dot{u}_{oo} + \hat{K}u_{oo} = F_{oo} \quad (5.11)$$

donde  $\hat{K}_{oo}$  es la matriz de rigidez condensada dada por:

$$\hat{K}_{oo} = K_{oo} - K_{to}^T K_{tt}^{-1} K_{to} \quad (5.12)$$

### 5.4. SOLUCIÓN DEL SSFEM SIN APLICACIÓN DEL CONTROL.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del análisis de la estructura del puente con el uso de elementos finitos estocásticos. Los programas que permiten encontrar los resultados de este análisis se elaboraron en **MATLAB**.

Todas las gráficas muestran la variación de los desplazamientos y el cambio de la función de densidad de probabilidad con el tiempo. La figura 5.2 muestra los desplazamientos verticales en el centro de la luz del puente (nodo 249) el cual varía fuertemente cuando se adiciona las cargas vehiculares, pero después de unos pocos segundos el sistema continua con un desplazamiento

que varía muy poco en magnitud. La gráfica 5.3 permite ver la historia del desplazamiento en la dirección transversal del puente, puede notarse que la magnitud de este desplazamiento es considerablemente menor que en la dirección vertical y que las funciones de densidad de probabilidad muestran una menor variación de la variable.

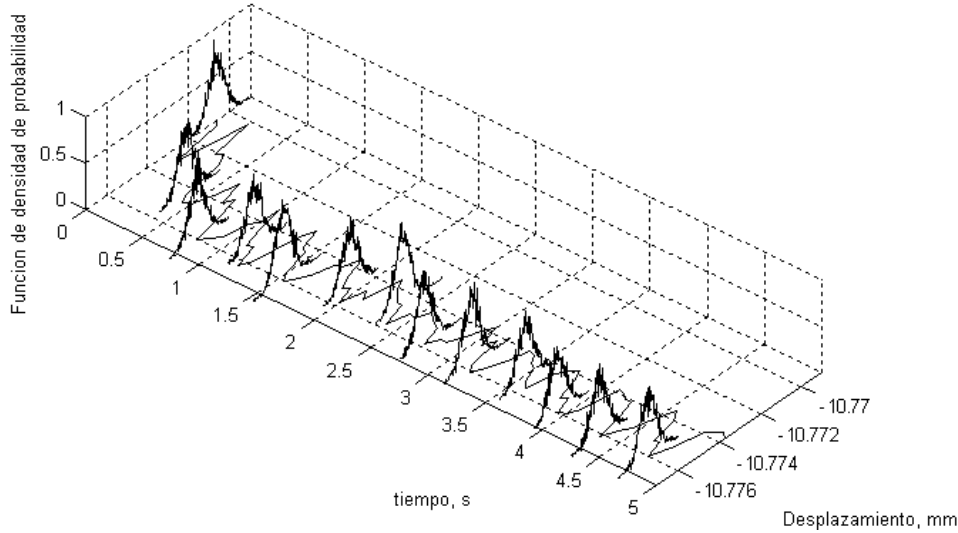


Figura 5.2: Desplazamiento en  $z$  y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 sin control.

## 5.5. SOLUCIÓN DEL SSFEM CON APLICACIÓN DEL CONTROL.

Las gráficas 5.4 y 5.5 muestran la respuesta del sistema con la aplicación de la fuerza de control para los grados de libertad vertical y transversal respectivamente en el nodo 249, puede observarse que las magnitudes de los desplazamientos son muy similares a las obtenidas en el caso en el cual no se aplica la ley de control, pero una comparación de los resultados puede ser más útil.

## 5.6. COMPARACIÓN DEL LA SOLUCIÓN SSFEM CON Y SIN APLICACIÓN DEL CONTROL.

Las gráficas que se presentan a continuación permiten comparar la respuesta del sistema con y sin la aplicación de la fuerza de control. La primera de estas gráficas corresponde al desplazamiento longitudinal del nodo 148 (Figuras 5.6 y 5.7). Las figuras muestran que los desplazamientos tienen una magnitud no superior a  $1,030\text{mm}$  y que la aplicación de la fuerza de control tiene muy poco impacto en los desplazamientos en el sentido longitudinal. Por otro lado, las funciones de

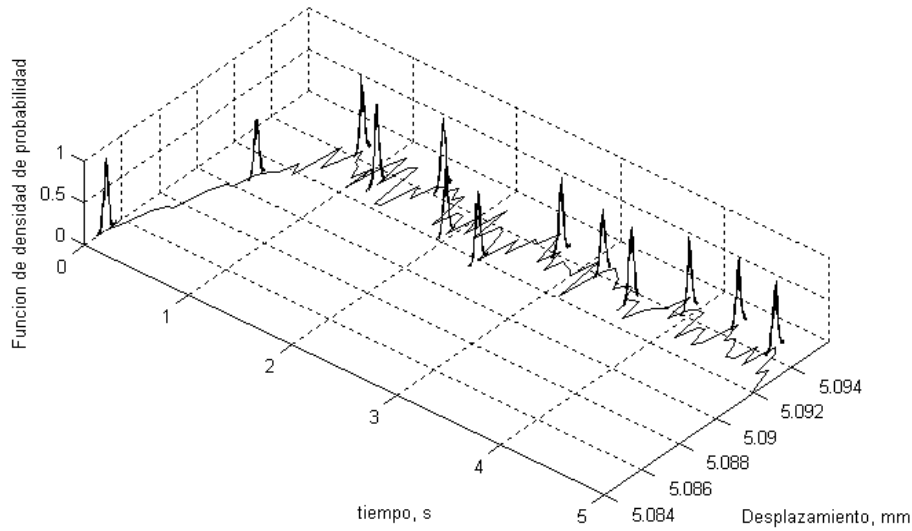


Figura 5.3: Desplazamiento en  $y$  y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 sin control.

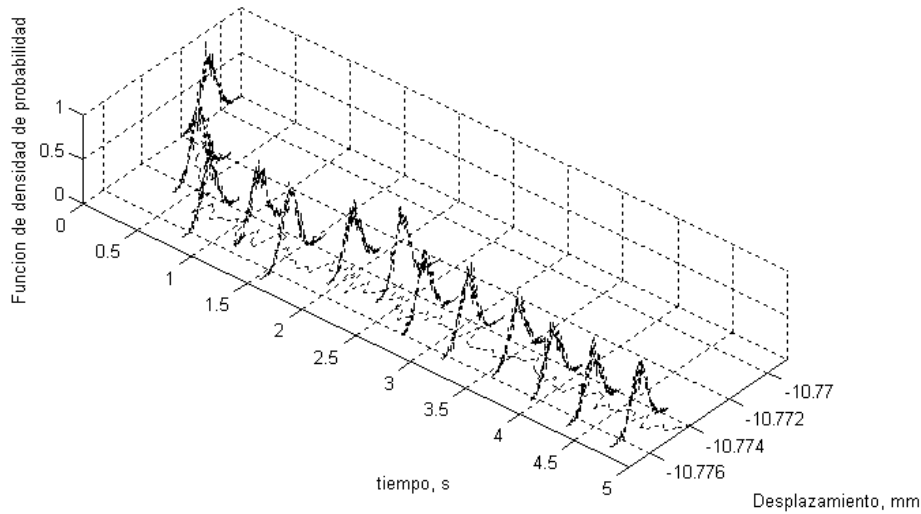


Figura 5.4: Desplazamiento en  $z$  y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 con control.

densidad de probabilidad muestran que los desplazamientos en este sentido no se alejan mucho del valor medio.

Las figuras 5.8 y 5.9 representan los desplazamientos verticales del puente en la localización

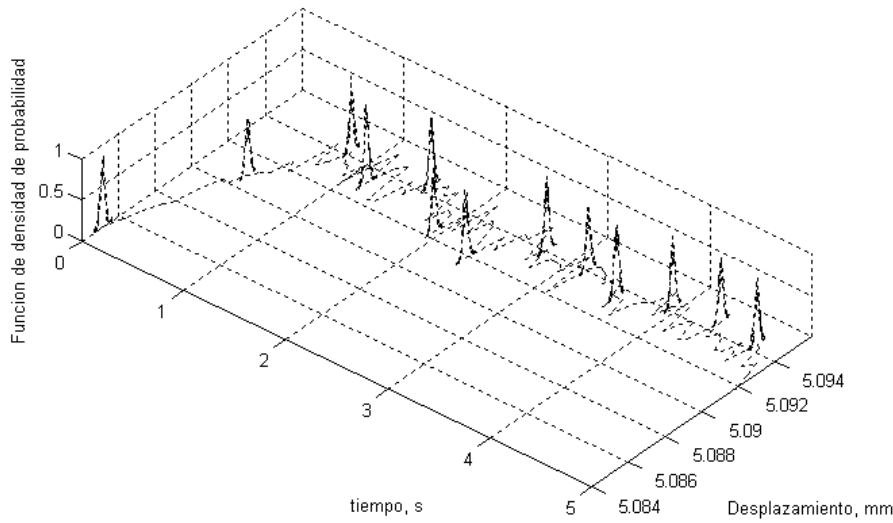


Figura 5.5: Desplazamiento en  $y$  y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249 con control9.

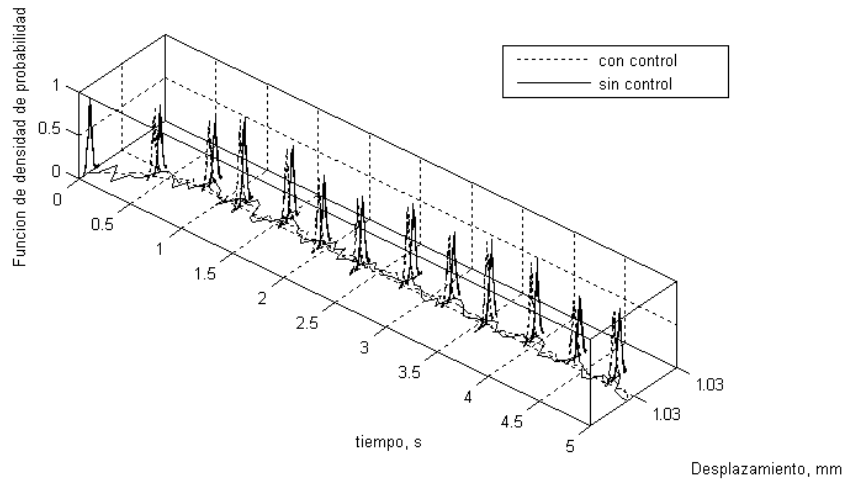
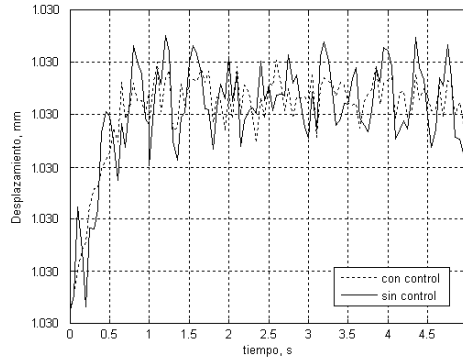


Figura 5.6: Desplazamiento en  $x$  y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 148.

del nodo 148. Las gráficas muestran que en el caso de los desplazamientos verticales, las fuerzas de control tienen un gran impacto y reducen las amplitudes de la respuesta.

La respuesta del nodo 249 en esta dirección (Figuras 5.11 y 5.10) confirman de nuevo que los desplazamientos verticales se reducen con la aplicación del control. Las gráficas también muestran que los desplazamientos verticales tienen una mayor variación respecto a la media que en el caso de los desplazamientos transversales y longitudinales.

Figura 5.7: Desplazamiento en  $x$  para el nodo 148.

Las gráficas 5.12 y 5.13 corresponden a la respuesta del sistema en el grado de libertad transversal del nodo ubicado en el centro de la luz. En este caso el desplazamiento se aleja muy poco de su valor medio y prácticamente coinciden las funciones de densidad de probabilidad en el estado controlado y no controlado.

### 5.6.1. Análisis del coeficiente de variación.

En la gráfica 5.14 se muestra el coeficiente de variación del desplazamiento en la dirección  $y$  para el nodo 249. El rango de variación de este coeficiente está entre 0.0222 y 0.0227  $\%$ , lo que demuestra que tanto en estado controlado como en estado no controlado, la consideración del módulo de elasticidad como un campo gaussiano no genera una variación significativa de los desplazamientos transversales.

La historia del coeficiente de variación con el tiempo para el caso de los desplazamientos verticales se encuentra en la gráfica 5.15, el rango de variación de este desplazamiento está entre 0.0226 y 0.0227. Es interesante ver que el desplazamiento vertical de la respuesta sin control presenta mayor variación que la respuesta obtenida sin la aplicación de la fuerza de control lo cual indica que el control ayuda a reducir la dispersion de los desplazamientos en  $z$  más significativamente que en las otras direcciones bajo la presencia de un campo aleatorio en el módulo de elasticidad del material que constituye el puente.

### 5.6.2. Análisis de la potencia de la señal.

La potencia del desplazamiento en el sentido transversal y vertical se encuentran en las figuras 5.17 y 5.18 respectivamente. En estas figuras se puede ver que entre la potencia de la respuesta controlada y no controlada no existe una diferencia significativa para los dos casos, sin embargo, la potencia de la respuesta controlada siempre se encuentra por debajo de la curva que corresponde a la respuesta no controlada.

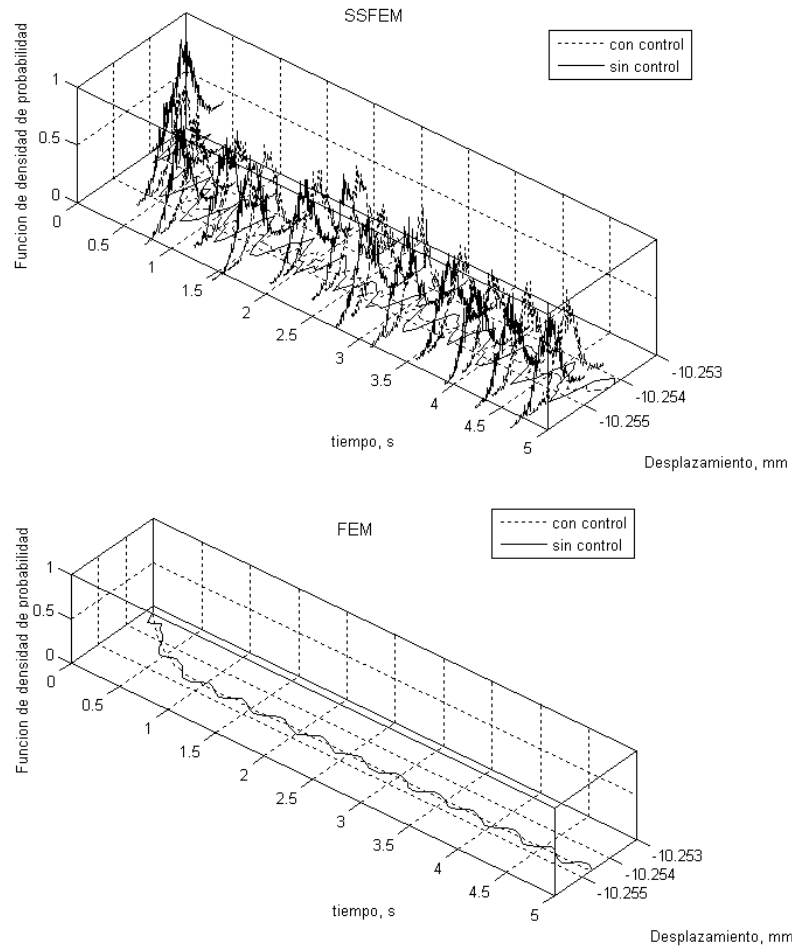


Figura 5.8: Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  haciendo uso del SSFEM y distribución de probabilidad en el tiempo para el nodo 148. Inferior: Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  haciendo uso del FEM

## 5.7. COMPARACIÓN DEL LA SOLUCIÓN SSFEM Y FEM CON Y SIN APLICACIÓN DEL CONTROL.

En las figuras 5.19 - 5.25 se muestran la solución por elementos finitos utilizando la versión determinista y la aproximación estocástica con y sin la aplicación de la fuerza de control para los nodos 249 y 148 en los grados de libertad indicados en la figura 5.1.

### 5.7.1. Desplazamiento vertical.

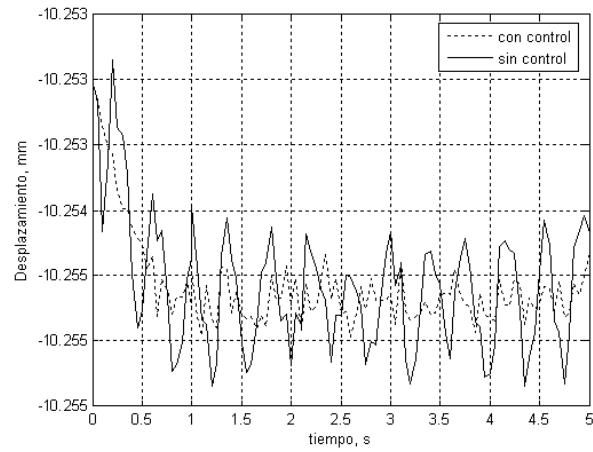


Figura 5.9: Efecto del control sobre el desplazamiento en  $z$  para el nodo 148.

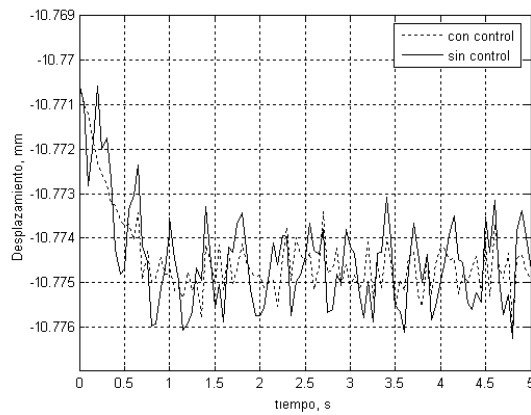


Figura 5.10: Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 249.

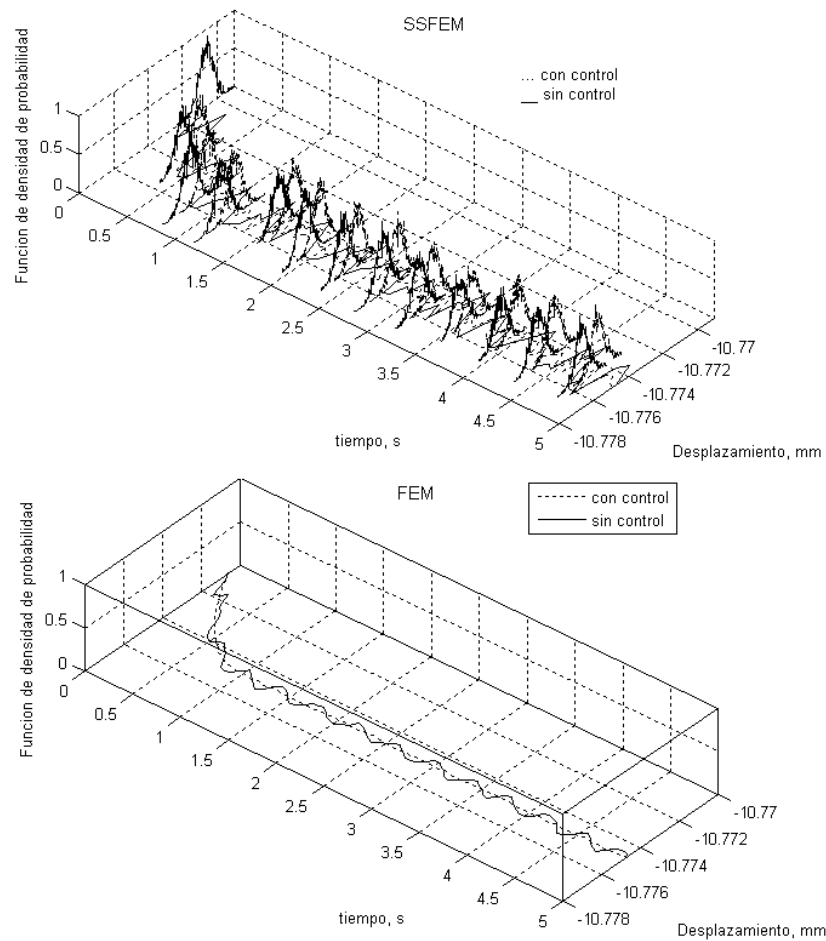


Figura 5.11: Superior: Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  haciendo uso del SSFEM y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249. Inferior: Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  haciendo uso del FEM.



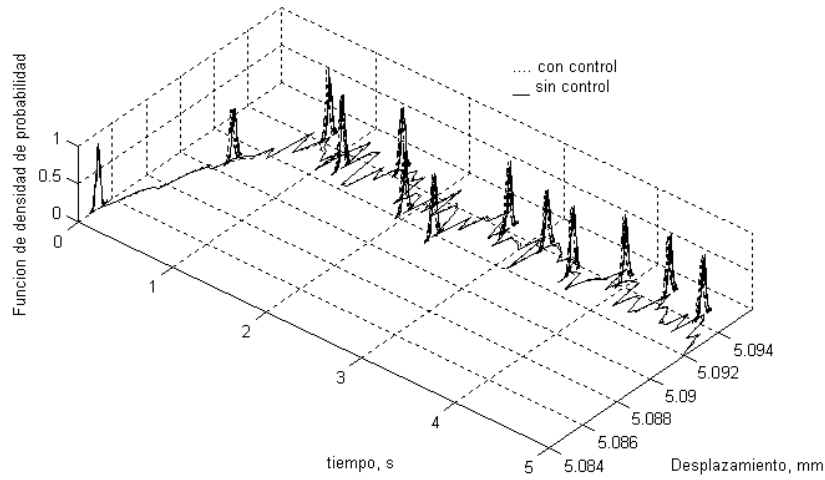


Figura 5.12: Efecto del control en el desplazamiento en  $y$  haciendo uso del SSFEM y densidad de probabilidad en el tiempo para el nodo 249.

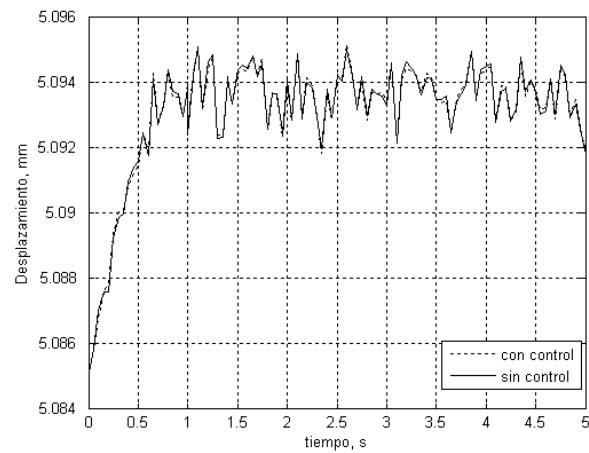


Figura 5.13: Efecto del control en el desplazamiento en  $y$  para el nodo 249.

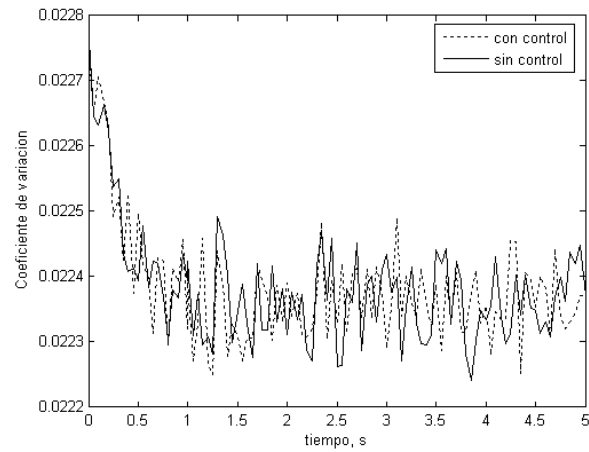


Figura 5.14: Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección  $y$  en el nodo 249.

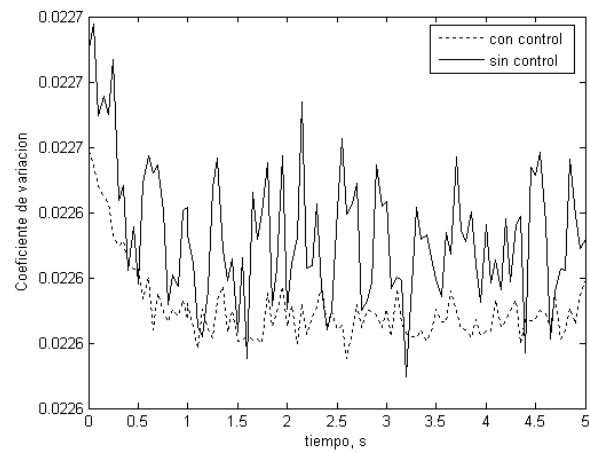


Figura 5.15: Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección  $z$  en el nodo 249.

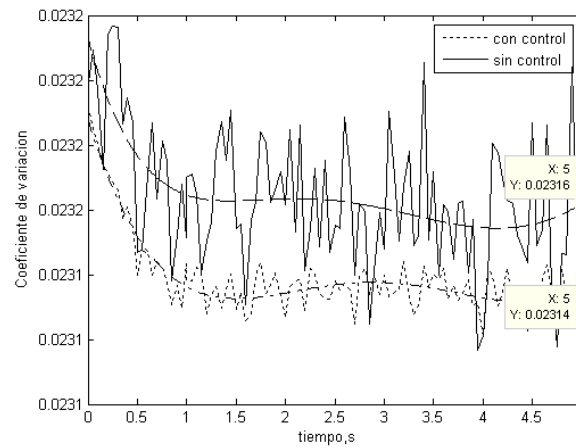


Figura 5.16: Coeficiente de variación para el desplazamiento en la dirección  $z$  en el nodo 249.

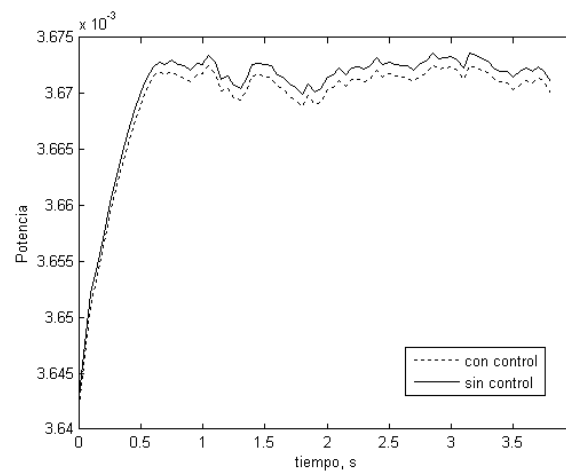


Figura 5.17: Potencia del desplazamiento en  $y$  para el nodo 249.

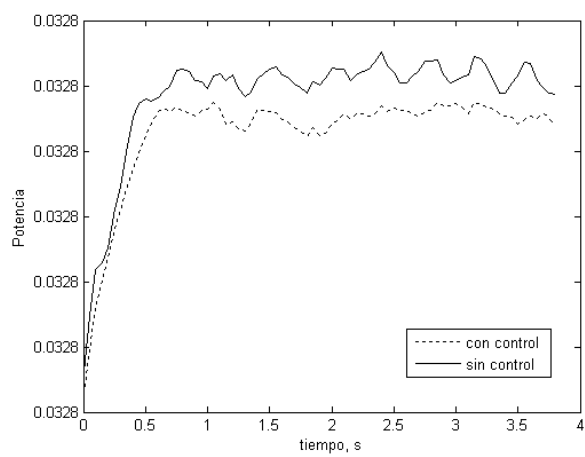


Figura 5.18: Potencia del desplazamiento en  $z$  para el nodo 249.

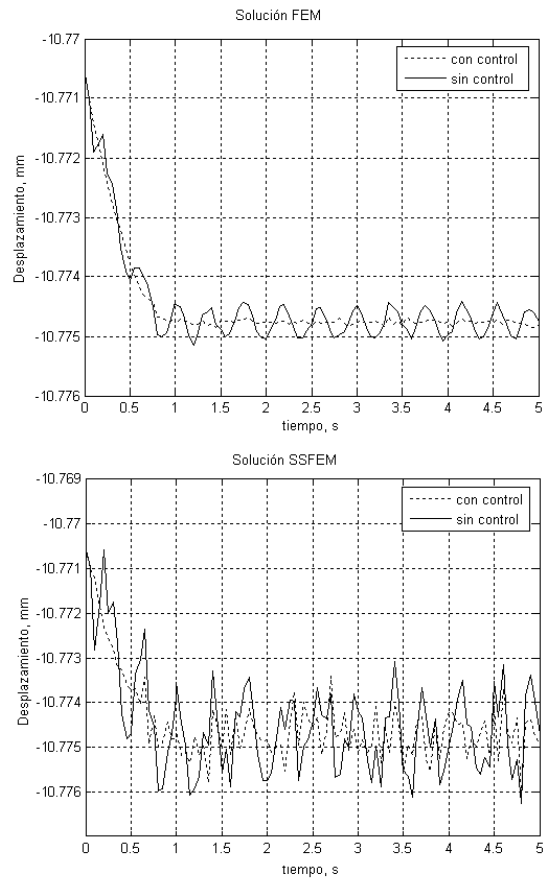


Figura 5.19: Superior, Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 249 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 249 con SSFEM.

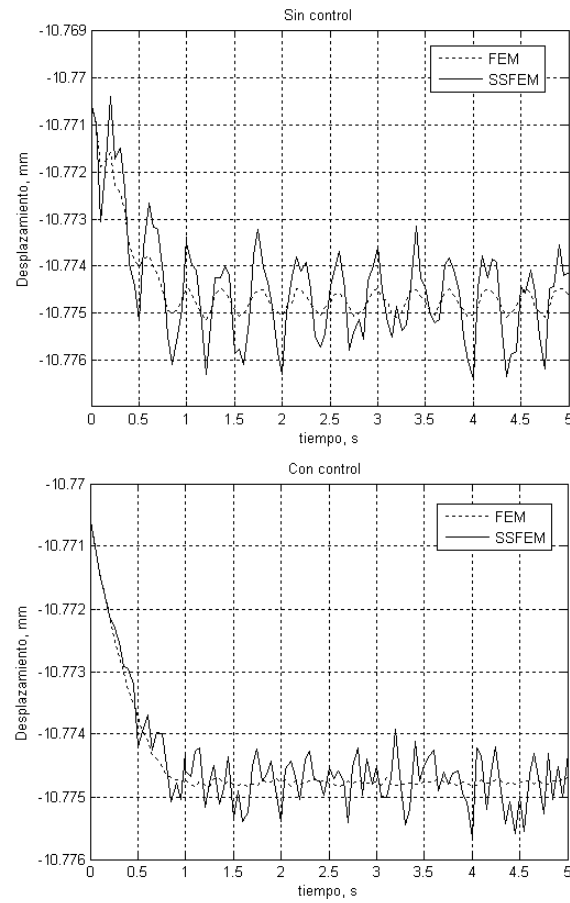


Figura 5.20: Superior, Desplazamiento en  $z$  para el nodo 249 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en  $z$  para el nodo 249 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM.

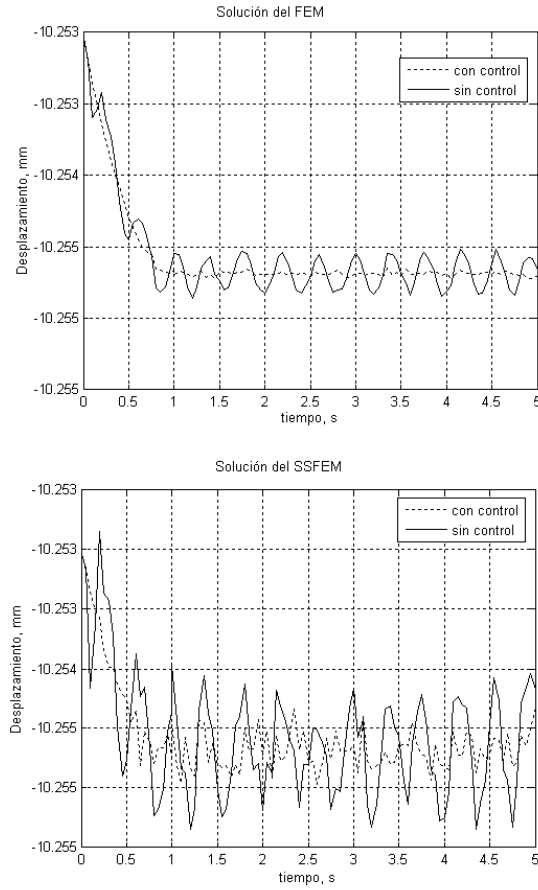


Figura 5.21: Superior, Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 148 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 148 con SSFEM.

La reducción en la oscilación del desplazamiento en la dirección vertical en los nodos 249 y 148 es fácilmente notable en las gráficas 5.19 y 5.21 respectivamente, cuando se aplica el método de elementos finitos clásico (FEM), mientras que al implementar el método de elementos finitos estocástico (SSFEM) se produce una variación significativa del desplazamiento alrededor del valor del desplazamiento en  $z$  determinista tanto en el caso controlado como en el caso no controlado.

Las figuras 5.20 y 5.22 muestran la respuesta del sistema frente a las cargas de tráfico utilizando el método de elementos finitos clásico y el SSFEM con control como sin él. Tanto para el desplazamiento vertical en el nodo 249 como para el nodo 148 la respuesta tiene mayor amplitud cuando se aplica el SSFEM, esto significa que la consideración del módulo de elasticidad como un campo aleatorio produce un aumento del desplazamiento respecto al caso determinista en ambos casos, con control y sin control. Se muestra claramente en estas figuras que tal aplicación de la fuerza de control en la estructura elimina casi completamente la vibración en ella en el caso determinista mientras que en el caso más real, es decir, con el SSFEM el efecto del control

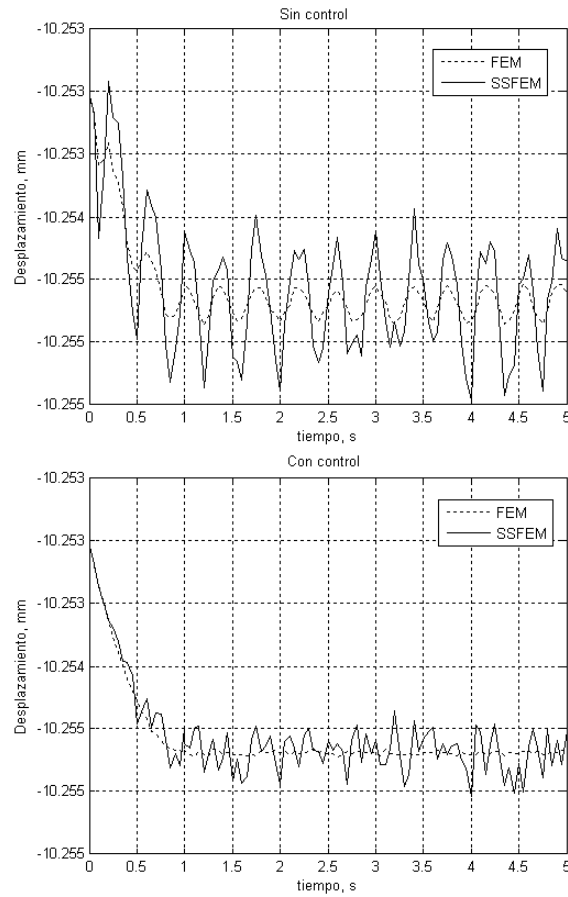


Figura 5.22: Superior, Desplazamiento en  $z$  para el nodo 148 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en  $z$  para el nodo 148 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM.



no elimina la vibración, concluyéndose que la eliminación de la vibración es aparente cuando se aplica el FEM.

### 5.7.2. Desplazamiento transversal.

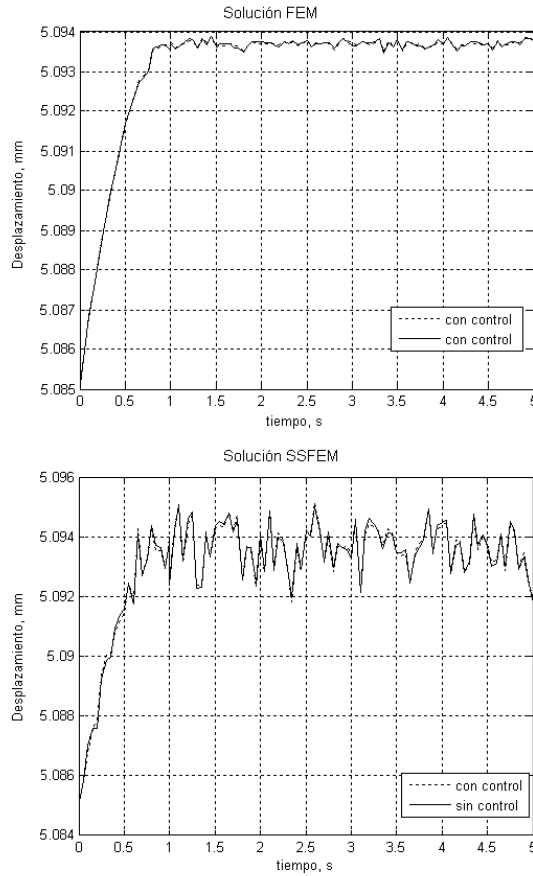


Figura 5.23: Superior, Efecto del control en el desplazamiento en  $y$  para el nodo 249 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en  $y$  para el nodo 249 con SSFEM.

El desplazamiento en  $y$  o en la dirección transversal del puente no sufre prácticamente ningún cambio cuando la fuerza de control es aplicada a la estructura, mientras que el efecto de considerar como un campo gaussiano al módulo de elasticidad produce variación en dicho desplazamiento como se muestra en la figura 5.23.

### 5.7.3. Desplazamiento longitudinal.

La figura 5.24 permite ver que el comportamiento del desplazamiento longitudinal del nodo 148 es reducido gracias a la aplicación de la ley de control y que como en los casos anteriores el empleo del SSFEM hace variar la respuesta alrededor del valor del desplazamiento obtenido con

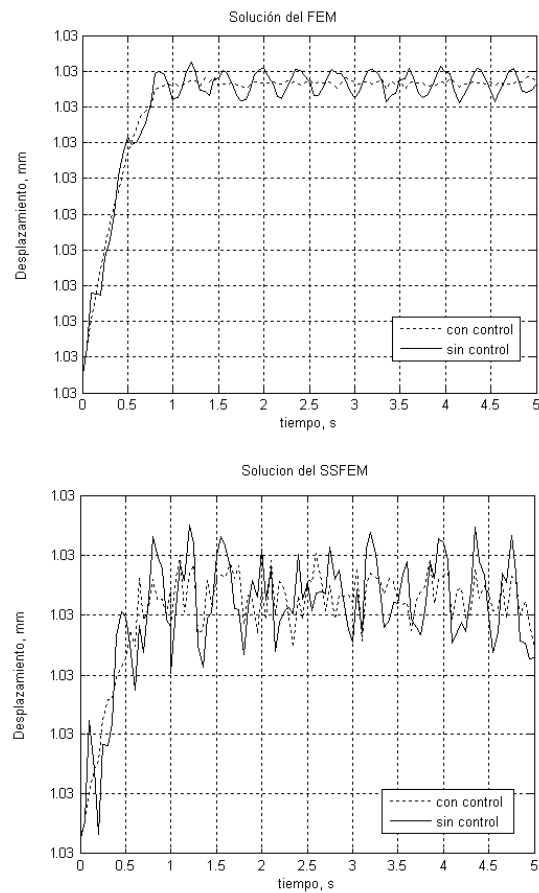


Figura 5.24: Superior, Efecto del control en el desplazamiento en  $x$  para el nodo 148 con FEM. Inferior, Efecto del control en el desplazamiento en  $x$  para el nodo 148 con SSFEM.

el uso del FEM.

En la figura 5.25 se observa el desplazamiento en  $x$  para el nodo 148 sin y con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Claramente se ve que la estimación del desplazamiento mediante el FEM es menor que la obtenida mediante el SSFEM tanto en el caso controlado como en el no controlado.

#### 5.7.4. Aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con SSFEM.

En esta sección se aplica al modelo de elementos finitos estocástico del puente una mayor fuerza de control para evaluar el efecto que tiene sobre la eliminación de la vibración que producen las cargas aplicadas sobre la estructura.

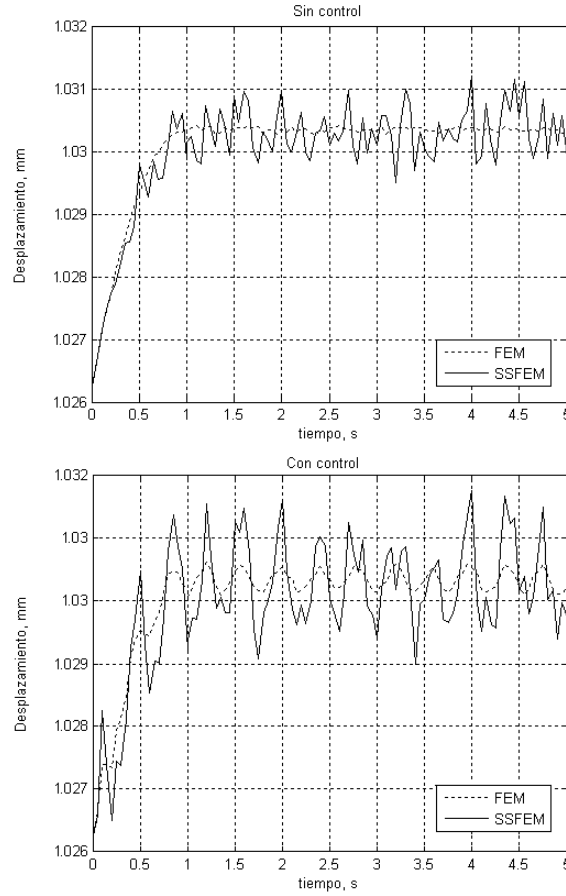


Figura 5.25: Superior, Desplazamiento en  $x$  para el nodo 148 sin aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM. Inferior, Desplazamiento en  $x$  para el nodo 148 con aplicación de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM.

En la gráfica 5.26 se muestra el efecto que tiene la aplicación de la fuerza de control cuando la matriz de pesos de estado es tomada como  $Q$ ,  $2Q$  y  $3Q$  sobre el desplazamiento vertical en el nodo 249. Se observa que al aumentar la fuerza de control, el sistema disminuye la vibración en el sentido vertical. Esto implica que la fuerza de control aplicada al modelo FEM es menor que la necesaria para eliminar las vibraciones producidas por el tráfico vehicular con el uso de la aproximación estocástica.

## 5.8. Análisis de la fatiga en el concreto.

La exposición de la estructura del puente a cargas repetidas como es el caso de los vehículos resulta en el decrecimiento de la resistencia, la cual puede conducir eventualmente a falla por fatiga.

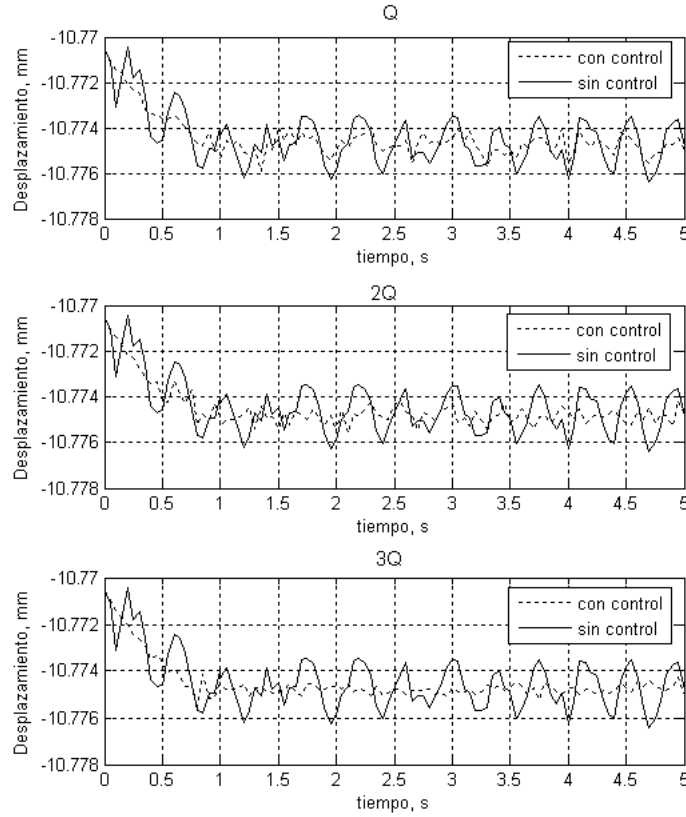


Figura 5.26: Efecto en el desplazamiento en  $z$  para el nodo 249 con el aumento de la fuerza de control a la estructura modelada con FEM y SSFEM.

La fatiga es un proceso de cambios estructurales internos progresivos y permanentes debido a las cargas repetitivas [9]. En el concreto, estos cambios pueden ser asociados principalmente al crecimiento de las microgrietas internas, lo cual resulta en el incremento de las deformaciones que son irreversibles. En el macronivel se manifiesta con cambios en las propiedades mecánicas de los materiales.

Las cargas por fatiga pueden ser definidas en dos categorías, cargas de ciclos altos y bajos. Las cargas vehiculares sobre puentes se clasifican como de ciclos altos (Lee [35]).

Varias aproximaciones se han utilizado para evaluar la fatiga de los elementos estructurales. La aproximación más empleada es el diagrama  $S - N$  o también conocidos como curvas de Wöhler (Alliche [?], Bazant [60]).

Las curvas  $S - N$  se obtienen experimentalmente tras someter distintas muestras a estados cíclicos de cargas y se establece la relación entre la pérdida de resistencia en función del número

de ciclos de carga. Para el caso de concreto reforzado esta curva se expresa de la siguiente forma:

$$S = a - b \log(N) \quad (5.13)$$

donde  $a$  y  $b$  son coeficientes experimentales. En este caso tendrán los siguientes valores  $a = 0,9302$  y  $b = 0,0368$  tomados de Naaman A. [26],  $S$  representa la relación de esfuerzos y  $N$  el número de ciclos. La figura 5.27 muestra la curva  $S - N$  para el caso de concreto reforzado sometido a cargas de flexión.

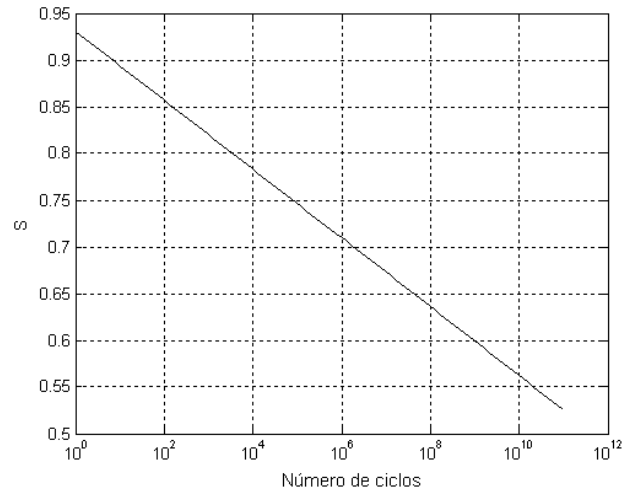


Figura 5.27: Curva  $S - N$  para el concreto reforzado.

Para estimar la vida útil del puente, esto es, el número de ciclos necesarios para que el proceso de fisuración pueda ocasionar un mecanismo de falla, se determinó inicialmente el esfuerzo máximo a flexión actuante en el centro de la luz a partir del momento,

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (5.14)$$

donde  $I$  es el momento de inercia,  $c$  la distancia de la fibra inferior al eje neutro y  $M$  el momento actuante. En el instante inicial se supone que la sección transversal del puente no presenta fisuración, así que el momento de inercia corresponde a la sección completa; luego de haber transcurrido muchos ciclos de carga las fisuras producidas por el paso de los vehículos producen una reducción de la sección transversal, por lo tanto el esfuerzo se calcula con una sección reducida,

$$\sigma = \frac{Mc}{I_r} \quad (5.15)$$

donde  $I_r$  es el momento de inercia reducido por la fisuración. Para determinar cual debía ser la longitud de la fisura se igualó el esfuerzo actuante con el esfuerzo de rotura del concreto y se

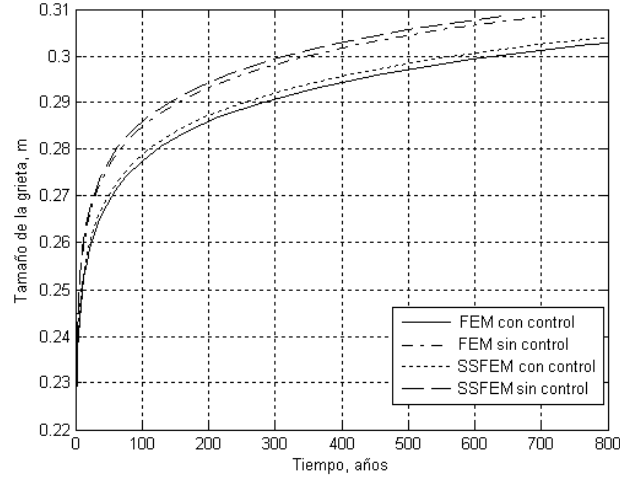


Figura 5.28: Crecimiento de la falla en el puente de concreto reforzado para los casos SSFEM, FEM con y sin control.

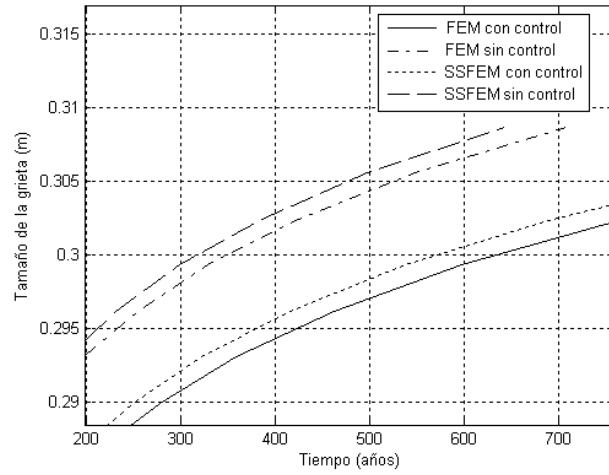


Figura 5.29: Detalle de la gráfica del crecimiento de la falla en el puente de concreto reforzado para los casos SSFEM, FEM con y sin control.

calculó la nueva sección reducida, esto es:

$$\sigma = f_r \quad (5.16)$$

donde  $f_r = 0,63\sqrt{f'_c}$ , donde  $f'_c$  es la resistencia a la compresión del concreto, de esta manera se llegó a que la longitud de la grieta debía ser de  $0,303m$ .

Tipo de modelo	Periodo estimado (seg)	Vida de fatiga (años)
Modelo FEM con control	0.20	770,9
Modelo SSFEM con control	0.22	693,8
Modelo FEM sin control	0.36	424
Modelo SSFEM sin control	0.40	385,5

Tabla 5.2: Vida esperada del puente.

Posteriormente se calculó el número de ciclos que se requerían en cada uno de los casos (FEM y SSFEM, con y sin control) para que el puente sufriera una fisura de  $0,303m$ . Para esto se determinó el rango de esfuerzos a partir de los esfuerzos calculados como se mencionó anteriormente, con este valor se entró en la curva de la la figura 5.27 y se determinó el número de ciclos el cual fue llevado a años de acuerdo a los resultados obtenidos en cada modelo (ver tabla 5.2). Debido a que hay una pérdida de resistencia en el material, el rango de esfuerzos varía con el tiempo y se debe calcular de nuevo el número de ciclos. En las figuras 5.28 y 5.29 se observa cuanto avanza la grieta con el tiempo.

Los resultados de la tabla 5.2 muestran que existe una gran influencia del control en el aumento de la vida útil del puente del  $81^0/0$  cuando el modelo implementado es el FEM y en el caso SSFEM el incremento es del  $80^0/0$ . Por tanto la aplicación del control a la estructura del puente puede ampliar la vida útil por efectos de fatiga casi al doble de la estructura sin efectos del control en ambos casos SSFEM y FEM.

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

Este trabajo se concentró en el estudio del comportamiento de una estructura flexible tomando como ejemplo un puente sometido a cargas vehiculares con el fin de observar el efecto que tienen las incertidumbres de los materiales en la respuesta dinámica del sistema. Se empleó el método de elementos finitos estocásticos (SSFEM) para transformar el continuo en un modelo matemático. Debido a las características aleatorias del módulo de elasticidad, este es considerado como un campo aleatorio, lo que hace necesario modificar la formulación inicial del método. Se hizo la aproximación espectral propuesta por Ghanem y Spanos, la cual, mediante el uso de expansiones en series permite discretizar "la dimension aleatoria", de tal manera que el vector de desplazamientos resultante puede ser reescrito como una expansión que caracteriza cualquiera de los desplazamientos nodales como una variable aleatoria.

La aplicación de un modelo en tres dimensiones a la dinámica del sistema puente-vehículo genera una interpretación más visual del comportamiento de la interacción entre las dos dinámicas comprometidas. La ventaja en desarrollar un modelo matemático para la interacción del puente y el vehículo es que los dos sistemas pueden ser vistos como un solo sistema de ecuaciones, por lo tanto no se requieren soluciones iterativas como en los modelos desarrollados hasta ahora. Debido al alto orden del sistema que describe esta dinámica, la descomposición modal es una herramienta útil en la reducción del orden del sistema, lo mismo sucede con la reducción de Guyen; estas reducciones no ocasionan pérdida excesiva de la exactitud de los resultado y tienen la ventaja adicional de solucionar el problema numérico.

El modelo numérico presentado para el análisis de la dinámica puente-vehículo permitió tener en cuenta la rugosidad de la superficie de rodadura, la cual, se ha demostrado en varias publicaciones, es una de las principales causas de las vibraciones producidas en los puentes debido a cargas vehiculares. El modelo también tuvo en cuenta la variación de la posición del vehículo en el puente convirtiéndolo en un modelo más aproximado que los propuestos en dos dimensiones.

Desde el punto de vista práctico los modelos tridimensionales pueden resultar más complejos que aquellos modelos sencillos en dos dimensiones utilizados habitualmente para resolver esta dinámica, pero por otro lado tiene la ventaja de entregar al usuario mayor cantidad de datos



del comportamiento estático y dinámico de la estructura en cualquier punto del puente y en todas las direcciones posibles del movimiento. Los resultados de la solución del puente-vehículo se utilizaron como datos de entrada en las simulaciones del controlador.

La aplicación del método de elementos finitos estocásticos presentado en este trabajo se realizó bajo dos supuestos principales; el primer es que en las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio solo existen relaciones lineales, esto se debe a que el SSFEM no se ha generalizado a problemas no lineales todavía. El segundo supuesto es que el campo aleatorio asociado con el módulo de elasticidad es gaussiano debido a que las expansiones de Karhunen-Loève no se han aplicado con éxito para discretizar otros campos aleatorios diferentes a este. A pesar de esto, los resultados son satisfactorios, porque son el punto de partida de otras posibles aplicaciones en las cuales se pueda generalizar esta metodología a situaciones que impliquen características estadísticas diferentes.

La solución de la dinámica al aplicar el método de elementos finitos estocásticos requiere resolver el sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo; así que en esta solución hay que tener en cuenta el efecto que tiene el gran número de ecuaciones simultáneas resultantes del ensamblaje de las contribuciones elementales a las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez.

La utilización de los elementos finitos tipo lámina en el modelo del puente aumentó considerablemente el número de grados de libertad de cada nodo, pasando de dos grados de libertad en los casos de tensión plana y deformación plana que se habían considerado hasta ahora en las aplicaciones, a seis en el caso de láminas, esto influye directamente en el costo computacional al requerirse la solución de *número de grados de libertad  $\times$  orden del caos homogéneo  $\times$  número de nodos* ecuaciones ( $\approx 6 \times 20 \times 479 = 57480$  para este caso particular). Con el fin de reducir el número de ecuaciones se aplicó el método de condensación estática y de esta manera el problema pudo ser resuelto en menos tiempo.

Además de obtener la información sobre la respuesta determinista del puente (o en general, cualquier otro sistema mecánico) el SSFEM tiene su mayor utilidad al arrojar la información estadística de los procesos de respuesta en cualquiera de los puntos del espacio y para cualquier tiempo, que con respecto a otros métodos los cuales requerirían ser ejecutados muchas veces para encontrar los datos deseados, el SSFEM únicamente necesita ser ejecutado una vez para encontrar tal información.

La idea de obtener una aproximación del proceso estocástico de respuesta es muy atractiva debido a la cantidad de subproductos que se pueden obtener. A pesar de ser el SSFEM un método tan costoso computacionalmente tiene la ventaja de conseguir una caracterización completa del proceso de respuesta. En la práctica esta información podría tener un papel importante en los procesos de diseño en sistemas mecánicos que posean características y propiedades aleatorias.

En este trabajo el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el modelo estructural lineal en el dominio del tiempo (modelo nodal) se llevó a un modelo en el espacio de estados, el

cual es más adecuado para realizar el análisis del sistema de control. Para alcanzar este modelo, la representación nodal se transformó en coordenadas modales, permitiendo ésta representación una reducción significativa del número de ecuaciones según el número de modos considerados. Así, la representación en espacio de estados tiene la ventaja adicional de presentar menos dificultades numéricas que cuando se trata con modelos nodales de alto orden.

El uso de un controlador LQG con propiedades de un controlador de baja autoridad permitió suprimir significativamente la vibración del sistema debida a cargas de tráfico, este hecho se verifica en el diagrama de polos y ceros (figura 4.4) en el cual los polos de la estructura flexible se mueven horizontalmente, es decir la estructura aumenta su amortiguamiento, mientras las frecuencias naturales permanecen casi sin cambios.

Se demostró que la aplicación de la ley de control puede reducir las magnitudes de los desplazamientos verticales producidos bajo cargas de tráfico y bajo la influencia de incertidumbres en las propiedades de los materiales, convirtiéndose ésta en una buena estrategia para aumentar la comodidad de quienes transitan sobre el puente. Por otro lado, el sistema controlado tal como se desarrolló en este trabajo, poco afectó los desplazamientos transversales, este hecho no tiene efectos negativos dentro del comportamiento estructural debido a que en este tipo de estructuras los esfuerzos en esta dirección no dominan el diseño.

Otra manera de verificar el efecto del controlador es en el cambio de la norma  $H_\infty$  de la matriz de transferencia de la estructura (figura 4.7), en la cual se presenta una supresión de los picos de resonancia mientras que en las frecuencias fuera de los picos la magnitud no presenta cambios considerables.

Se demostró que al considerar el módulo de elasticidad como un campo gaussiano la respuesta tanto controlada como no controlada aumenta su variación respecto a la respuesta determinista obtenida con el uso del método de elementos finitos clásico, especialmente en los desplazamientos verticales, lo que en el caso real significa que las variaciones de las propiedades de los materiales podrían ser una causa importante del aumento de las vibraciones producidas por el tráfico vehicular que circula sobre el puente.

El efecto de las cargas repetidas debidas al flujo vehicular es un tema que cada día interesa mas a los ingenieros de puentes debido a que este fenómeno conocido como fatiga podría conducir a la aparición de mecanismos de falla. El SSFEM podría ser útilmente empleado para estudiar este tipo de fenómenos debido a que permite conocer las características estadísticas del puente en cualquier punto de su geometría. Esta aplicación sería realmente importante, ya que hasta el momento no se ha desarrollado una metodología general que conduzca a la predicción de estos mecanismos, los cuales pueden conducir al deterioro y reducción de la vida útil de la estructura.

La aplicación de la ley de control a la estructura del puente modelado con elementos finitos estocásticos reduce la vibraciones producidas por las cargas de tráfico, condición que es deseable cuando se busca aumentar la vida útil de la estructura al reducir la fatiga que sufren los mate-

riales por causa del paso de los vehículos.

El modelado del puente con elementos finitos estocásticos permitió mostrar que las vibraciones producidas por el flujo vehicular son mayores a las obtenidas por la teoría de elementos finitos clásica. Esto sugiere que el análisis convencional de la fatiga debería realizarse aplicando el SSFEM para conseguir resultados más realistas.

Debido a que los desplazamientos resultantes en el modelo de elementos finitos estocásticos son mayores en magnitud a los obtenidos en el caso determinista fue necesario aplicar una mayor fuerza de control para eliminar las son efecto de las cargas móviles.

El análisis de fatiga demostró que gracias a que las vibraciones del puente disminuyen con la aplicación de la ley de control tanto para el caso del puente modelado con SSFEM como con FEM, la vida útil del puente puede extenderse. Al revisar en la tabla 5.2 el puente modelado con el FEM y con control tendría la mayor vida útil, mientras el caso similar modelado con SSFEM presenta una vida un poco más corta siendo esta estimación más realista al considerar los efectos de las incertidumbres de los materiales. En el caso no controlado también se presenta una reducción en la vida esperada al comparar los casos FEM y SSFEM.

A pesar de que los códigos de diseño de puentes no consideran el daño por fatiga en sistemas estructurales de concreto reforzado como criterio importante del diseño, éste es de todas maneras un aspecto importante que debe ser tenido en cuenta por los ingenieros debido a que este tipo de daños puede desencadenar mecanismos de falla más severos o cambiar el comportamiento del puente, modificando sus propiedades y conduciéndolas a campos no lineales (plasticidad).

# Bibliografía

- [1] Chopra A. *Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering*. Prentice - Hall, 2001.
- [2] Getachew A. Traffic load effects on bridges statistical. analysis of collected and monte carlo simulated vehicle data. Structural Engineering Royal Institute of Technology., Boletín 68, 2003.
- [3] Jnifene A. Active vibration control of flexible structures using delayed position feedback. Systems and control letters, 56:215–222, 2007.
- [4] Keese A. *A Review of Recent Developments in the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations (Stochastic Finite Elements)*. Institute of Scientific Computing Technical University, 2002.
- [5] Ngah M.F. Young A. Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures. Composite structures, 78:447–456, 2007.
- [6] AASHTO. *LRFD bridge design specifications. American association of state highway and transportation officials*. AASHTO, 1998.
- [7] ZabarasÑ Acharjee S. Uncertainty propagation in finite deformations. a spectral stochastic lagrangian approach. Computers methods in applied mechanics and engineering, 195:2289–2312., 2006.
- [8] Rahman S. Rao B. A perturbation method for stochastic meshless analysis in elastostatics. International Journal for numerical methods in engineering, 50:1969–1991, 2001.
- [9] Sobczyk K. Spencer B. *Random fatigue*. Academic Press., 1992.
- [10] Sudret B. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report UCB/SEMM*,. Departament of civil and enviromental engineering, University of California, 2000.
- [11] Puckett J. Barker R. *Desing of highway bridges*. John Willey and Sons,Inc, 1997.
- [12] Konuk A. Brennan D, Akpan I. Random field modelling of rainfall induced soil movement. geological survey of canada terrain sciences division february. *Martec Report*, No. TR,01-02, 2001.

- [13] Macke M. Buchern Ch. Stochastic computational mechanics. *Article for style for amas lecture notes.*, pages 1–58, 2003.
- [14] Felippa C. *Introduction to the analysis of linear elastic structures by the Finite Element Method (FEM)*. University of Colorado, 1990.
- [15] Lei Z. Qiu C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. *Computers and structures*, 77:651–657, 2000.
- [16] Feng M. Q. Chen Y. Modeling of traffic excitation for system identification of bridge structures. *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering.*, 21:57–66, 2006.
- [17] Kowalsky U. Zümendorf T. Dinkler D. Random fluctuations of material behaviour in fe-damage-analysis. *Computational materials science.*, 39:8–16, 2007.
- [18] Divine. *Dynamic Interaction between Vehicles and Infrastructure Experiment*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- [19] Kerschen G. Poncelet F. Physical interpretation of independent component analysis in structural dynamics. *Mechanical systems and signal processing*, 21:1561–1575, 2007.
- [20] Domínguez J. Galvín P. Dynamic analysis of a cable-stayed deck steel arch bridge. *Journal of constructional steel research.*, in press.
- [21] Doostan A. Ghanem R, Saad G. Efficient solution of stochastic systems: Application to the embankment dam problem. *Structural safety.*, in press.
- [22] Spanos P D. Ghanem R G. *Stochastic Finite Elements A Spectral Approach*. Dover publications. Inc., 1991.
- [23] Proppe C. Pradlwarter H.J. Schuëller G.I. Equivalent linearization and monte carlo simulation in stochastic dynamics. *Probabilistic engineering mechanics*, 18:1–15, 2003.
- [24] Schenk C.A. Pradlwarter H.J. Schuëller G.I. On the dynamic stochastic response of fe models. *Probabilistic engineering mechanics*, 19:161–170, 2004.
- [25] Mingori D. L. Gibson J. S. *Modeling and Control of Flexible Structures*. University of California at Los Angeles, 1988.
- [26] Naaman A. E. Hammoud H. Fatigue characteristics of high performance fiber-reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites.*, 20:353–363, 1998.
- [27] Ma C. Ho C. Active vibration control of structural systems by a combination of the linear quadratic gaussian and input estimation approaches. *Journal of Sound and Vibration*, 301:429–449, 2007.
- [28] Rebba R. Huang S. Mahadevan S. Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems. *Probabilistic engineering mechanics*, in press, 2007.

- [29] Tezduya T Hughe T. Finite element based upon mindlin plate theory with particular referentce to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics.*, 48:587–596, 1981.
- [30] Rodellar J. *Issues in active structural control.*, volume 1. Wiley, 2003.
- [31] Wu J. Finite element analysis and vibration testing of a three-dimensional crane structure. *Measurement.*, 39:740–749, 2006.
- [32] Bong K Kim Ch, Kawatani M. Three-dimensional dynamic analysis for bridge vehicle interaction with roadway roughness. *Computers and Structures.*, 83:1627–1645, 2005.
- [33] Evans K Buhl M. King B, HovakimyanÑ. Reduced order controllers for distributed parameter systems: Lqg balanced truncation and an adaptive approach. *Mathematical and Computer Modelling*, 43:1136–1149, 2006.
- [34] Huyse L. *A probabilistic treatment of uncertain boundary conditions in CFD applications.* Columbia University, 2002.
- [35] Barr B. Lee M.K. An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites.*, 26:299–305, 2004.
- [36] TRL Limited. *A guide to axle load surveys and traffic counts for determining traffic loading on pavements.* TRL Limited, 2004.
- [37] Clouteau D. Lombaert G, Degrande G. Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.*, 19:473–488, 2000.
- [38] Dicleli M. Seismic design of highway bridges using multiple types of isolation bearings. *Structural Control for civil and infrastructural engineering.*, 3:1–15, 2001.
- [39] Hatch M. *Vibration simulation using MATLAB and ANSYS.* Champman and Hall/CRC, 2001.
- [40] Stefanou G. Papadrakakis M. *Assessment of spectral representation and Karhunen-Loève expansion methods for the simulation of Gaussian stochastic fields.* Computer methods in applied mechanics and engineering, 2006.
- [41] Harder Robert L Ho Claus C. MacNeal Richard H, Wilson Charles T. The treatment of shell normals in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30:235–242, 1998.
- [42] OBrien E. J. OConnor Alan. Traffic load modelling and factors influencing the accuracy of predicted extremes. *Canadian journal of civil engineering.*, 32:270–278, 2005.
- [43] Lin W. Lee Z. K. Lu P. The relationship between eigenfunctions af karhunen-loeve descomposition and the modes of distributed parameter vibration system. *Journal of sound and vibration*, 256 N° 4:791–799, 2002.

- [44] Pota H. R. Petersen I. R. Minimax lqg optimal control of a flexible beam. *Control Engineering Practice*, 11, 2003.
- [45] Belotserkovskiy P.M. Interaction between a railway track and uniformly moving tandem wheels. *Journal of sound and vibration.*, 298:855–876, 2006.
- [46] Guedri M. Bouhaddi N. Majed R. Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method. *Journal of sound and vibration.*, 297:123–145, 2006.
- [47] Vasilescu A. Razaqpur A.G, Nofal M. An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1–23, 2003.
- [48] Bhattacharya B. Chakraborty S. Ne-mcs technique for stochastic structural response sensitivity. *Computers method in applied mechanics and engineering.*, 191:5631–5645, 2002.
- [49] Stuart A. Schwab C, Smith P. *Finite element methods for structures with large stochastic variations*. Oxford University Press, 2003.
- [50] Koh B.H. Dyke S.J. Structural health monitoring for flexible bridge structures using correlation and sensitivity of modal data. *Computers and structures*, 85:117–130, 2007.
- [51] Grigoriu M. Soong T. *Random vibration of mechanical and structural systems*. PTR prentice hall., 1993.
- [52] Der Kiureghian. Sudret B. Comparison of finite element reliability methods,. *Probabilistic Engineering Mechanics*, pages 337–348, 2002.
- [53] Bai Y. Keller T. Modal parameter identification for a gfrp pedestrian bridge. *Composite structures*, in press, 2007.
- [54] Hughes T. *The finite element method linear static and Dynamic Finite element analysis*. Dover publications inc, 2000.
- [55] Gawronski W. *Advanced structural dynamics and active control of structures*. Springer, 2004.
- [56] Liu W. *Vibration Control of Large Scale Flexible Structures Using Magnetorheological Dampers*. Worcester Polytechnic Institute, 2005.
- [57] Kwon Y. *The finite element method using MATLAB*. CRC press, 2000.
- [58] Yan Y. *The Finite element method for a linear stochastic parabolic partial differential equation driven by additive noise*. University of Technology., 2003.
- [59] Yang Y. Wu Y. A versatile element for analyzing vehicle bridge interaction response. *Engineering Structures*, 23:452–469, 2001.
- [60] Bazant Z. Concrete fracture models. testing and practice. *Engineering fracture mechanics.*, 69:165–205, 2002.

- [61] Roschke P. Zhang J. Active control of a tall structure excited by wind. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 83:209–223, 1999.
- [62] Wardenier J. Zhang Q, Vrouwenvelder A. Dynamic amplification factors and eudl of bridges under random traffic flows. *Engineering Structures*, 23:663–672, 2001.
- [63] Law S. Zhu X. Dynamic multilane bridge deck from moving vehicles. *Journal of sound and vibration.*, 251 N° 4:697–716, 2002.